2^o COMPITO DI ALGEBRA 1

13 giugno 2017

1. Sia G un gruppo semplice di ordine 168.

(a) Sia $\mathcal{S}$ l'insieme dei 7-Sylow e sia $P \in \mathcal{S}$. Calcolare $|N_G(P)|$.

(b) Sia $Q \in \mathcal{S}$, $Q \neq P$. Mostrare che $N_G(Q) \cap N_G(P) \cong \mathbb{Z}_3$.

2. Sia $f : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^3$ l'omomorfismo di gruppi definito da $f((1,0,0,0) = (1,0,-1)$, $f((0,1,0,0) = (4,3,-1)$, $f((0,0,1,0) = (0,9,3)$, $f((0,0,0,1) = (3,12,3)$.

(a) Si consideri una successione esatta

$$\mathbb{Z}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^3 \longrightarrow A \longrightarrow \{0\}$$

Descrivere A a meno di isomorfismo.

(b) Contare quanti sono gli omomorfismi surgettivi da A a $\mathbb{Z}_3^2$.

3. Sia $f(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Calcolare il generatori e grado del campo di spezzamento L di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ ed esibire un elemento primitivo di questo campo.

(b) Calcolare il gruppo di Galois G di L su $\mathbb{Q}$.

(c) Calcolare tutti i sottogruppi di G e i corrispondenti campi fissi.

(d) Calcolare il grado del campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{F}_7$.

Soluzione:

(a) Il polinomio $f(x)$ è il prodotto dei polinomi ciclotomici $\varphi_8(x) = x^4 + 1$ e $\varphi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ che si annullano rispettivamente sulle radici ottave e quinte primitive dell'unità. Pertanto dette rispettivamente ζ_8 e ζ_5 una di tali radici, si ha che $L = \mathbb{Q}[\zeta_5, \zeta_8]$. Inoltre $\zeta_5\zeta_8$ ha ordine moltiplicativo pari a $\mathrm{lcm}(5,8) = 40$ e quindi $L = \mathbb{Q}[\zeta_{40}]$ che è un'estensione di $\mathbb{Q}$ di grado $\phi(40) = 16$ e $\zeta_4 0$ è un suo elemento primitivo.

(b) Le estensioni $\mathbb{Q}[\zeta_8]$ e $\mathbb{Q}[\zeta_5]$ hanno entrambe grado $4 = \phi(8) = \phi(5)$ su $\mathbb{Q}$ e sono entrambe estensioni di Galois. Inoltre hanno gruppo di Galois rispettivamente $G_1 = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\zeta_8]/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_8^* = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $G_2 = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\zeta_5]/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_5^* = \mathbb{Z}_4$. Poiché $[\mathbb{Q}[\zeta_{40}] : \mathbb{Q}] = 16$ abbiamo che $\mathbb{Q}[\zeta_5] \cap \mathbb{Q}[\zeta_8] = \mathbb{Q}$ e quindi $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\zeta 5, \zeta_8]/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4$.

(c) Abbiamo $\zeta_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, quindi $\mathbb{Q}[\zeta_8] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, i]$ e $L = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, i, \zeta_5]$.
Il gruppo G_1 è generato dal coniugio $\bar{\sigma} : i \mapsto -i, \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}$ e da $\bar{\tau} : i \mapsto i, \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$. Il gruppo G_2 è generato da $\bar{\mu} : \zeta_5 \mapsto \zeta_5^2$.
Quindi G è generato da

$$\sigma : \begin{cases} i \mapsto -i, \\ \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}, \\ \zeta_5 \mapsto \zeta_5; \end{cases} \qquad \tau : \begin{cases} i \mapsto i, \\ \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}, \\ \zeta_5 \mapsto \zeta_5; \end{cases} \qquad \mu : \begin{cases} i \mapsto i, \\ \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}, \\ \zeta_5 \mapsto \zeta_5^2; \end{cases}$$

di ordine rispettivamente $2, 2, 4$ e che commutano tra loro.
Notiamo inoltre che $\zeta_5 + \zeta_5^{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e quindi $\mathbb{Q}[\zeta_5 + \zeta_5^{-1}] = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.
I sottogruppi propri di G sono i seguenti:

i. 7 gruppi di ordine 2 con i seguenti generatori e campi fissi:
σ ($L^\sigma = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \zeta_5]$),
τ ($L^\tau = \mathbb{Q}[i, \zeta_5]$),
μ^2($L^{\mu^2} = \mathbb{Q}[i, \sqrt{2}, \sqrt{5}]$),
$\sigma\tau$ ($L^{\sigma\tau} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}i, \zeta_5]$) ,
$\sigma\mu^2$ ($L^{\sigma\mu^2} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}, i(\zeta_5 - \zeta_5^{-1})]$),
$\tau\mu^2$ ($L^{\tau\mu^2} = \mathbb{Q}[i, \sqrt{5}, \sqrt{2}(\zeta_5 - \zeta_5^{-1})]$),
$\sigma\tau\mu^2$ ($L^{\sigma\tau\mu^2} = \mathbb{Q}[i\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{2}(\zeta_5 - \zeta_5^{-1})]$).

ii. 7 gruppi di ordine 4, isomorfi a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, con i seguenti generatori e campi fissi:
$\{\sigma, \tau\}$ (campo fisso $\mathbb{Q}[\zeta_5]$),
$\{\sigma, \mu^2\}$ (campo fisso $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$),
$\{\tau, \mu^2\}$ (campo fisso $\mathbb{Q}[i, \sqrt{5}]$),
$\{\sigma\tau, \mu^2\}$ (campo fisso $\mathbb{Q}[i\sqrt{2}, \sqrt{5}]$),
$\{\sigma, \tau\mu^2\}$ (campo fisso $\mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{2}(\zeta_5 - \zeta_5^{-1})]$),
$\{\sigma\mu^2, \tau\}$ (campo fisso $\mathbb{Q}[\sqrt{5}, i(\zeta_5 - \zeta_5^{-1})]$),
$\{\sigma\mu^2, \sigma\tau\}$ (campo fisso $\mathbb{Q}[\sqrt{5}, i\sqrt{2}(\zeta_5 - \zeta_5^{-1})]$).

iii. 4 gruppi di ordine 4, isomorfi a $\mathbb{Z}_4$, con i seguenti generatori e campi fissi:
μ (campo fisso $\mathbb{Q}[i, \sqrt{2}]$),
$\sigma\mu$ (campo fisso $\mathbb{Q}[i(\zeta_5 + \zeta_5^3 + \frac{1}{2}), \sqrt{2}]$),
$\tau\mu$ (campo fisso $\mathbb{Q}[i, \sqrt{2}(\zeta_5 + \zeta_5^{-1} + \frac{1}{2})]$),
$\sigma\tau\mu$ (campo fisso $\mathbb{Q}[i\sqrt{2}, i(\zeta_5 + \zeta_5^{-1} + \frac{1}{2})]$).

iv. un sottogruppo di ordine 8 isomorfo a $\mathbb{Z}_2^3$ generato da σ, τ, μ^2, con campo fisso $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.

v. 6 sottogruppi di ordine 8 isomorfi a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, con i seguenti generatori e campi fissi:
μ, τ (campo fisso $\mathbb{Q}[i]$),
$\mu, \sigma\tau$ (campo fisso $\mathbb{Q}[i\sqrt{2}]$),

μ, σ (campo fisso $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$),
$\sigma\mu, \tau$ (campo fisso $\mathbb{Q}[i(\zeta_5 + \zeta_5^{-1} + \frac{1}{2})]$),
$\sigma\mu, \sigma\tau$ (campo fisso $\mathbb{Q}[i\sqrt{2}(\zeta_5 + \zeta_5^{-1} + \frac{1}{2})]$),
$\tau\mu, \sigma$ (campo fisso $\mathbb{Q}[\sqrt{2}(\zeta_5 + \zeta_5^{-1} + \frac{1}{2})]$)

(d) Abbiamo che 8 non divide $6 = |\mathbb{F}_7^*|$, quindi $\varphi_8(x)$ non si fattorizza completamente in $\mathbb{F}_7$. Tuttavia 8 divide $48 = |\mathbb{F}_{49}^*|$, quindi $\varphi_8(x)$ si spezza in fattori di grado 1 in $\mathbb{F}_{49}$.

D'altra parte $7^4 \cong 1(5)$ e quindi il più piccolo campo in cui $\varphi_5(x)$ si fattorizza completamente è $\mathbb{F}_{7^4}$.

Ne segue che il campo di spezzamento di $f(x)$ è $\mathbb{F}_{7^4}$, che è un'estensione di grado 4 di $\mathbb{F}_7$.

Istruzioni:

- non scrivere a matita;
- consegnare solo la bella copia;
- non utilizzare appunti, quaderni, libri o oggetti elettronici;
- scrivere lo svolgimento dell'esercizio 2 su un foglio separato.

Es 1 Per i teoremi di Sylow, $n_7 = |\mathcal{S}| = 8$, e inoltre
$$|N_G(P)| = \frac{|G|}{|\mathcal{S}|} = \frac{168}{8} = 21$$
Osserviamo che P agisce per coniugio su $\mathcal{S}$ suddividendolo in due orbite: $\{P\}$ e $\mathcal{S} - \{P\}$.
Infatti: P è fissato dall'azione ($pPp^{-1} = P \ \forall p \in P$).
Inoltre $\mathcal{S} - \{P\}$ è costituito da un'unica orbita: infatti le orbite dell'azione hanno cardinalità 1 o 7, e se ci fosse $Q \in \mathcal{S} - \{P\}$ lasciato fisso dall'azione, avremmo $pQp^{-1} = Q \ \ \forall p \in P$ ossia $P \subseteq N_G(Q)$. Ma questo è assurdo perchè $N_G(Q)$ ha cardinalità 21 e possiede un solo 7-Sylow, che è Q, non P.
Ora consideriamo l'azione di $N_G(P)$ su $\mathcal{S}$ per coniugio. Poichè $P < N_G(P)$, da quanto visto sopra concludiamo che $\mathcal{S}$ viene suddiviso in due orbite: $\{P\}$ e $\mathcal{S} - \{P\}$.

Allora lo stabilizzatore di un $Q \in S - \{P\}$ rispetto a questa azione ha cardinalità

$$\frac{|N_G(P)|}{|S|-1} = \frac{21}{7} = 3$$

Per definizione questo stabilizzatore è $N_G(Q) \cap N_G(P)$ che dunque è $\cong \mathbb{Z}/_3$

Es 2

La matrice associata a f risp. alle basi standard è

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 12 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

la cui forma di Smith è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\mathrm{Im}\, f \cong \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$

e $A \cong \dfrac{\mathbb{Z}^3}{\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right)} \cong \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_6$

Gli omomorfismi surgettivi da $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3^2$ sono tanti quante sono le matrici invertibili in $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$, ossia $(3^2-1)(3^2-3) = 8 \cdot 6 = 48$.