

## COMPITO DI ALGEBRA 1

7 giugno 2013

1. Siano  $\sigma = (1, 2)(3, 4)(5, 6, 7)$  e  $\tau = (1, 2)(8, 9, 10)$ . Determinare il centralizzatore di  $\langle \sigma \rangle$  e il centralizzatore di  $\langle \sigma, \tau \rangle$  in  $\mathcal{S}_{10}$ .
  
2. Classificare i gruppi di ordine 20 a meno di isomorfismo.
  
3. Per ogni anello commutativo con identità  $R$  indichiamo con  $J_R$  il suo radicale di Jacobson, cioè l'intersezione di tutti i suoi ideali massimali.
  - a) Dimostrare che  $x \in J_R$  se e solo se  $1 + xy$  è invertibile in  $R$ , per ogni  $y \in R$ .
  - b) Sia  $f : A \rightarrow B$  un omomorfismo surgettivo di anelli commutativi con identità. Dimostrare che  $f(J_A) \subseteq J_B$ .
  
4.
  - a) Determinare il gruppo di Galois su  $\mathbb{Q}$  del campo di spezzamento del polinomio  $f(x) = x^4 - 12$ .
  - b) Sia  $K$  un'estensione finita di  $\mathbb{Q}$ . Determinare i possibili gradi del campo di spezzamento di  $f(x)$  su  $K$  ed esibire un esempio per ogni grado possibile.