SOLUZIONI DEL 1^0 COMPITINO DI ALGEBRA 1

31 ottobre 2014

Esercizio 1.
a) Determinare il centralizzatore di $\sigma = (1,2)(3,4)(5,6)$ in $\mathcal{S}_8$.
b) Determinare il numero di soluzioni in $\mathcal{S}_8$ dell'equazione

$$x^3 = (1,2)(3,4)(5,6).$$

Soluzione esercizio 1 a) Il centralizzatore di σ è lo stabilizzatore di σ rispetto all'azione di $\mathcal{S}_8$ in sé data dal coniugio. Quasto dà la formula $|Z_{\mathcal{S}_8}(\sigma)| = |\mathcal{S}_8|/|orb(\sigma)| = 8!/\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{1}{3!} = 2^5 3$. Sappiamo che sicuramente commutano con σ i cicli che la compongono e le permutazioni disgiunte da σ, quindi $H = \langle (1,2); (3,4); (5,6); (7,8)\rangle \subseteq Z_{\mathcal{S}_8}(\sigma)$, e si ha $H = \langle (1,2)\rangle\langle (3,4)\rangle\langle (5,6)\rangle\langle (7,8)\rangle$ e quindi $|H| = 2^4$. Inoltre commutano con σ anche le permutazioni che scambiano tra loro i cicli che la compongono, e questi costituiscono un sottogruppo $K \cong \mathcal{S}_3$ (si calcola $K = \langle (1,3)(2,4); (1,3,5)(2,4,6)\rangle$). Chiaramente $H \cap K = \{id\}$ perché le permutazioni di H commutano con tutti i cicli di σ mentre quelle di K li scambiano tra loro. Ne segue che $|HK| = 2^5 3$ quindi coincide con il centralizzatore.

(b) Sia $\rho \in \mathcal{S}_8$ una soluzione dell'equazione $x^3 = \sigma$, allora $ord(\rho^3) = 2$ da cui segue che $ord(\rho) = 2$ oppure 6. Se $ord(\rho) = 2$ allora $\rho^3 = \rho$ quindi l'unica soluzione in questo caso è σ. Se invece $ord(\rho) = 6$ allora ρ è un 6 ciclo (non può essere di tipo 3+2 o 3+2+2 o 3+3+2 e neppure 6+2 perché il suo cubo non sarebbe di tipo 2+2+2). Sia $\rho = (a,b,c,d,e,f)$, allora $\rho^3 = (a,d)(b,e)(c,f) = (1,2)(3,4)(5,6)$: possiamo supporre $a = 1$ (in questo modo rendo unica la scrittura del 6 ciclo ρ), allora necessariamente $d = 2$, b può essere 3,4,5,6, e una volta scelto b anche e è fissato, per c rimangono i due possibili valori non scelti e f è determinato per esclusione. Abbiamo trovato quindi che i 6 cicli che risolvono la nostra equazione sono $4 \cdot 2$, e le soluzioni sono 9 in totale.

Esercizio 2.
Dimostrare che il gruppo degli automorfismi di $G = \mathcal{A}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è isomorfo a $\mathcal{S}_4$.

Soluzione esercizio 2) Osserviamo che prima cosa che i sottogruppi $\mathcal{A}_4 \times \{\bar{0}\}$ e $\{id\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sono caratteristici in G. Abbiamo infatti che $Z(G) = Z(\mathcal{A}_4) \times Z(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{id\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, che è quindi caratteristico. Inoltre sappiamo che gli unici elementi di ordine 3 di G sono quelli del tipo $((a,b,c), \bar{0})$, quindi tali elementi sono permutati tra loro dagli automorfismi di G: poiché $\mathcal{A}_4$ è generato dai 3 cicli si ottiene che $\mathcal{A}_4 \times \{\bar{0}\}$ è caratteristico in G. In queste ipotesi sappiamo che

$$Aut(\mathcal{A}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong Aut(\mathcal{A}_4) \times Aut(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong Aut(\mathcal{A}_4).$$

Rimane quindi da calcolare il gruppo degli automorfismi di $\mathcal{A}_4$.
Consideriamo l'azione di $\mathcal{S}_4$ su $\mathcal{A}_4$ data dal coniugio ($\mathcal{A}_4$ è un sottogruppo normale di $\mathcal{S}_4$):

$$\varphi : \mathcal{S}_4 \mapsto Aut(\mathcal{A}_4).$$

Sappiamo che $\mathcal{A}_4 \cong Int(\mathcal{A}_4) = \varphi(\mathcal{A}_4) \subseteq \varphi(\mathcal{S}_4) \cong \mathcal{S}_4/ker(\varphi)$, quindi $|ker(\varphi)| = 1$ oppure 2. Dato che $\mathcal{S}_4$ non ha sottogruppi normali di ordine 2, l'omomorfismo φ è iniettivo, quindi $Aut(\mathcal{A}_4)$ contiene un sottogruppo isomorfo a $\mathcal{S}_4$.
D'altra parte osserviamo che $\mathcal{A}_4 = \langle (1,2,3); (1,2)(3,4) \rangle$: infatti $\langle (1,2,3); (1,2)(3,4) \rangle$ è un sottogruppo di ordine multiplo di 6 perché contiene un elemento di ordine 2 e uno di ordine 3, ma $\mathcal{A}_4$ non ha sottogruppi di ordine 6, quindi tale sottogruppo ha ordine 12 e coincide con $\mathcal{A}_4$. Ne segue che ogni automorfismo di $\mathcal{A}_4$ è definito una volta assegnate le immagini di $(1,2,3)$ e di $(1,2)(3,4)$. Poiché in $\mathcal{A}_4$ ci sono 8 3-cicli e 3 permutazioni di tipo 2+2, abbiamo che $\mathcal{A}_4$ ha al più 24 automorfismi. Da quanto detto segue che $Aut(\mathcal{A}_4) \cong \mathcal{S}_4$.

Esercizio 3.
Sia G un gruppo di ordine 399.
a) Mostrare che G è un prodotto semidiretto di gruppi ciclici.
b) Che ordine può avere $Z(G)$? Dare un esempio per ogni possibile ordine.

Soluzione esercizio 3) Il numero dei 19-Sylow di G deve essere $\equiv 1 \bmod 19$ e deve dividere 21, quindi la sola possibilità è che vi sia un unico 19-Sylow P, normale.
Sia Q un 7-Sylow, poiché P è normale e $P \cap Q = \{e\}$, PQ è un sottogruppo di G di ordine 133. Poiché l'indice di PQ in G è 3, che è il più piccolo primo che divide la cardinalità di G, $N = PQ$ è normale. Inoltre, poiché 7 non divide $19 - 1 = |\mathrm{Aut}(P)|$, non esistono omomorfismi non banali da Q ad $\mathrm{Aut}(P)$ e dunque N è il prodotto diretto di P e Q e quindi è un gruppo ciclico.
Sia ora R un 3-Sylow, $R \cap N = \{e\}$ perché $3 \nmid |N| = 133$ e dunque N non contiene elementi di ordine 3. Di conseguenza $G = NR$ e G è un prodotto semidiretto $G = N \rtimes R$
Sia $\phi : R \to \mathrm{Aut}(N)$ l'omomorfismo determinato dal coniugio in G. Il gruppo N é ciclico di ordine 133 e quindi è isomorfo a $\mathbb{Z}/7 \times \mathbb{Z}/19$. Dunque $\mathrm{Aut}(N) \simeq (\mathbb{Z}/7)^* \times (\mathbb{Z}/19)^*$.
Sia y un generatore di R. Sia $\phi(y) = (a, b)$ con $a \in (\mathbb{Z}/7)^*$ $b, \in (\mathbb{Z}/19)^*$. Gli elementi di ordine 3 in $(\mathbb{Z}/7)^*$ sono $2, 4$. Gli elementi di ordine 3 in $(\mathbb{Z}/19)^*$ sono 7 e 11. Quindi i possibili valori di a sono $1, 2, 4$ e i possibili valori di b sono $1, 7, 11$.
Il gruppo G è abeliano se e solo se $\phi(y) = \mathrm{Id}_N$, cioè $(a, b) = (1, 1)$. In questo caso il centro è dato da tutto G.
Se $a = 1$, $b \neq 1$, allora il gruppo G non è abeliano, ma R commuta con Q quindi Q sta nel centro di G. Poiché il quoziente rispetto al centro non può essere ciclico e quindi il centro non può avere indice primo in G, il centro di G sarà proprio Q, quindi è ciclico di ordine 7.
Se $a \neq 1$ e $b = 1$, allora il gruppo G non è abeliano, ma R commuta con P quindi P sta nel centro di G. Poiché il quoziente rispetto al centro non può essere ciclico e quindi il centro non può avere indice primo in G, il centro di G sarà proprio P, quindi è ciclico di ordine 19.
Se $a \neq 1$ e $b \neq 1$ allora il centro non può contenere elementi di ordine 7 o di ordine 19. Possiamo escludere anche che ci sia un elemento di ordine 3 nel centro, perché in tal caso potremmo supporre (a meno di coniugio) che questo generi il 3-Sylow R e quindi ci troveremo nel primo caso e il gruppo G dovrebbe essere abeliano. Dunque ne concludiamo che il centro di G deve essere banale.