

## COMPITO DI ALGEBRA 1

13 febbraio 2015

### Esercizio 1.

Siano  $\sigma = (1, 2, 3, 4)$  e  $\tau = (2, 4)(5, 6)$  permutazioni di  $\mathcal{S}_6$ .

- Determinare la cardinalità di  $H = \langle \sigma, \tau \rangle$  e del centralizzatore di  $H$  in  $\mathcal{S}_6$ .
- Determinare il normalizzatore di  $H$  e mostrare che  $H$  è contenuto in un unico 2-Sylow  $P$  di  $\mathcal{S}_6$ .

### Esercizio 2

Sia  $G$  un gruppo di ordine 300.

- Mostrare che  $G$  non è semplice.
- Dire se esiste un  $G$  che non contiene sottogruppi ciclici di ordine 15.

### Esercizio 3.

Sia  $A$  un dominio a fattorizzazione unica e sia  $P$  un ideale primo di  $A$ ; poniamo  $S_P = A \setminus P$ .  
Mostrare che  $S_P^{-1}A$  è un dominio a fattorizzazione unica.

### Esercizio 4.

Sia  $\alpha = \sqrt[3]{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{C}$ .

- Mostrare che  $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{5})$ .
- Determinare il campo di spezzamento  $K$  e il gruppo di Galois del polinomio minimo di  $\alpha$  su  $\mathbb{Q}$ .
- Descrivere le sottoestensioni di  $K$  che sono di Galois su  $\mathbb{Q}$  e il cui gruppo di Galois è abeliano.