COMPITO DI ALGEBRA 1
7 settembre 2015

Esercizio 1.
Diciamo che un gruppo finito G è iperciclico se tutti i suoi sottogruppi di Sylow sono ciclici. Supponiamo che G sia iperciclico. Mostrare i seguenti fatti:
a) tutti i sottogruppi e i quozienti di G sono iperciclici;
b) per un primo p e un intero r fissati, tutti i sottogruppi di G di ordine p^r sono coniugati;
c) se N è un sottogruppo normale di G e H è un p-sottogruppo di G allora

$$|N \cap H| = \mathrm{MCD}(|N|, |H|).$$

d) ogni sottogruppo normale di G è caratteristico.

Esercizio 2.
Sia $G = D_{15}$ il gruppo diedrale di ordine 30 (cioè il gruppo delle isometrie di un poligono regolare di 15 lati).
a) Provare che, per ogni divisore d di 30, G possiede almeno un sottogruppo di ordine d;
b) determinare tutti i divisori d di 30 per i quali G possiede un unico sottogruppo di ordine d.

Esercizio 3.
a)Dimostrare che non esistono omomorfismi surgettivi da $\mathbb{Z}[x]$ in $\mathbb{Q}$.
b) Sia $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Q}$ l'omomorfismo definito da $\varphi(f(x)) = f(\frac{1}{10})$. Determinare gli elementi invertibili e gli ideali primi di $\varphi(\mathbb{Z}[x])$.

Esercizio 4.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ indichiamo con ζ_n una radice n-esima primitiva dell'unità.
a) Determinare le sottoestensioni del campo $\mathbb{Q}(\zeta_7)$.
b) Sia $L = \mathbb{Q}(\zeta_7, \zeta_5)$. Determinare tutte le sottoestensioni $K \subseteq L$ tali che $[L : K] = 2$.