SOLUZIONI DEL COMPITINO DI ALGEBRA 1
3 novembre 2017

Esercizio 1.
Sia σ la permutazione $(12)(34)(56)$ di S_6.

1. Risolvere l'equazione $x^3 = (12)(34)(56)$ in S_6.

2. Determinare la struttura del centralizzatore di σ.

Soluzione: (1) L'equazione $x^3 = (12)(34)(56)$ implica che $x^6 = id$, quindi che x deve avere ordine 2 o 6 (non è possibile che x abbia ordine 1 o 3). L'unica soluzione con x di ordine 2 è data da $x = x^3 = (12)(34)(56)$. Gli elementi di ordine 6 in S_6 sono i 6 cicli e le permutazioni di tipo 3+2, quest'ultime però hanno un punto fisso e quindi non possono risolvere l'equazione assegnata. Scriviamo un generico 6 ciclo come $(1, a, b, c, d, e)$: questo risolve l'equazione proposta se e solo se $(1, a, b, c, d, e)^3 = (1, c)(a, d)(b, e) = (12)(34)(56)$, quindi se $c = 2$ $(a, d) = (34)$ e $(b, e) = (56)$ o $c = 2$ $(a, d) = (56)$ e $(b, e) = (34)$. Ci sono quindi 8 cicli di lunghezza 6 che risolvono l'equazione (i cicli (135246), (145236),(136245), (146235), (153264), (163254), (154263), (164253)) che ha quindi 9 soluzioni.

(2) La classe di coniugio di σ è costituita dalle permutazioni di tipo $2 + 2 + 2$ in S_6, quindi la sua cardinalità è $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}\frac{1}{3!} = 15$. Ne segue che la cardinalità del centralizzatore $Z(\sigma)$ è $6!/15 = 48$. Una permutazione che commuta con sigma può commutare con ognuno dei suoi cicli o scambiarli tra loro. Ricordiamo che una permutazione ciclica commuta con le sue potenze e con le permutazioni disgiunte, quindi il sottogruppo di $Z(\sigma)$ delle permutazioni che commutano con tutti i cicli di σ è

$$H = \langle (12), (34), (56) \rangle \cong \langle (12) \rangle \times \langle (34 \rangle \times \langle (56) \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$$

(il secondo isomorfismo è ovvio e il primo segue dal fatto che permutazioni disgiunte commutano). Poiché σ è prodotto di 3 cicli della stessa lunghezza questi possono essere scambiati tra loro in 3! modi: consideriamo il sottogruppo K di $Z(\sigma)$ generato dalla permutazione (135)(246) che scambia le 3 trasposizioni di σ ciclicamente e da (13)(24) che scambia due dei cicli e fissa il terzo. Chiaramente $K \cong S_3$; inoltre $H \cap K = \{id\}$ (questo si puo' vedere ad esempio osservando che tutte le permutazioni di H fissano i cicli di σ mentre l'unica permutazione di K che li fissa è l'identità), quindi $|HK| = |H||K| = 48$ e $Z(\sigma) = HK$. Osserviamo anche che H è un sottogruppo normale (basta vedere che è normalizzato dai generatori di K), quindi

$$Z(\sigma) \cong H \rtimes K \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes S_3$$

dove S_3 agisce su $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ per permutazione delle coordinate.

Esercizio 2.
Un sottogruppo H di un gruppo finito G si dice subnormale in G se esiste una successione (H_i) di sottogruppi di G tali che

$$H \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \triangleleft \cdots \triangleleft H_n \triangleleft G.$$

Mostrare i seguenti fatti:

1. se G è un p-gruppo finito tutti i suoi sottogruppi sono subnormali;
2. dare un esempio di un gruppo G e un sottogruppo subnormale H che non è normale in G;
3. se H è subnormale in G e S è un p-Sylow di G allora $H \cap S$ è un p-Sylow di H.

Soluzione.

1. Fissato un p-gruppo G dimostriamo che ogni sottogruppo H è subnormale per induzione sulla cardinalità dell'indice $[G : H]$. Il passo base è banale: se $[G : H] = 1$ allora G è subnormale in G. Altrimenti consideriamo il normalizzatore $N_G(H)$ di H in G. In un p-gruppo il normalizzatore di un sottogruppo H contiene strettamente il gruppo H, quindi $H \triangleleft N_G(H)$. Per passo induttivo $N_G(H)$ è subnormale quindi prolungando la catena di sottogruppi normali relativa a $N_G(H)$ con $H \triangleleft N_G(H)$ si ottiene che H è subnormale.

2. Consideriamo il gruppo D_4 e una sua riflessione s. Il sottogruppo $\langle s \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ non è normale in D_4, infatti sia r la rotazione di angolo minimo si ha:

   $$rsr = r^2 s.$$

   Per il punto precedente $\langle s \rangle$ è subnormale nel p-gruppo D_4.

3. Trattiamo prima il caso in cui il sottogruppo H sia normale in G. Consideriamo $H \cap S$ e sia T un p-Sylow di H contenente $H \cap S$, vogliamo mostrare che T coincide con $H \cap S$. Sia gSg^{-1} un p-Sylow di G contenente T per un qualche $g \in G$, si ha

   $$T = gSg^{-1} \cap H = g(S \cap H)g^{-1}$$

   quindi T e $H \cap S$ hanno la stessa cardinalità e quindi coincidono e quindi $H \cap S$ è un p-Sylow di H.

   In generale procediamo come nel primo punto, cioè per induzione sull'indice di H. Supponiamo H strettamente contenuto in H_1 e per passo induttivo $H_1 \cap S =: S_1$ è un p-Sylow di H_1. Abbiamo appena visto che $H \cap S_1$ è un p-Sylow di H perché H è normale in H_1 e l'uguaglianza $H \cap S_1 = H \cap S$ conclude la dimostrazione.

Esercizio 3.
Sia G un gruppo di ordine 300.

1. Mostrare che G non può essere semplice.

2. Classificare i gruppi di ordine 300 che contengono un sottogruppo di ordine 12, un elemento di ordine 4 e uno di ordine 25.

Soluzione.

1. Sia n_5 il numero dei 5-Sylow di G, per i teoremi di Sylow si deve avere che $n_5 \equiv 1$ modulo 5 e che $n_5 \mid 12$. Le uniche possibilità sono $n_5 = 1$ o $n_5 = 6$. Nel primo caso il 5 Sylow è unico e quindi normale. Supponiamo che $n_5 = 6$, fissiamo un 5-Sylow S e sia $N_G(S)$ il suo normalizzatore. Sappiamo che l'indice $[G : N_G(S)]$ coincide con n_5 quindi il quoziente $G/N_G(S)$ (non ha una struttura di gruppo perché $N_G(S)$ non è normale!) è un insieme di cardinalità 6. L'azione di G su $G/N_G(S)$

$$\psi : G \longrightarrow S\left(G/N_G(S)\right) \simeq S_6$$

   definita da $g \cdot xN_G(S) = gxN_G(S)$ ha nucleo non banale poiché $|G| = 300$ non divide $|S_6| = 720$. In questo caso G ha come sottogruppo normale $\ker\psi$.

2. Mostriamo che il 5-Sylow è unico, studiando l'azione ψ. Fissiamo una classe laterale $xN_G(S)$ e la formula sulla cardinalità dell'orbita implica che $|\ker\psi| \mid |\operatorname{Stab}(xN_G(S)) = \frac{300}{6} = 50$. Abbiamo già osservato che 5 divide $|\ker\psi|$, se 25 dividesse $|\ker\psi|$ allora tutti e sei i 5-Sylow sarebbero contenuti in $\ker\psi$ ma in un gruppo di ordine 50 esiste un unico 5-Sylow. Mostriamo che $\ker\psi$ contiene un elemento di ordine 2 per concludere che ha cardinalità 10.

   Sia H un sottogruppo di ordine 12 di G, il 2-Sylow è ciclico e almeno uno tra il 3-Sylow e il 4-Sylow è normale. Poiché non ci sono omomorfismi non nulli da $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ in $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ il 3-Sylow è normale e il gruppo H è isomorfo a $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ o a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Sia x un elemento in H di ordine 3, H è contenuto in $N_G(\langle x\rangle)$.

   L'elemento $\psi(x)$ in S_6 ha ordine 3 ed è un 3-ciclo o un due 3-ciclo. In entrambi i casi $\psi(x)$ ha $2\binom{6}{3}$ coniugati in S_6 quindi il suo normalizzatore $N_{S_6}(\psi(x))$ ha cardinalità 18. Poiché $\psi(H)$ è un sottogruppo di $N_{S_6}(\psi(x))$ allora esiste un elemento di ordine 2 in $H \cap \ker\psi$.

   Studiamo $\psi(G)$ che è un gruppo di ordine 30 con $n_5 = 6$. Il gruppo $\psi(G)$ ha solo $30 - 6 \cdot 4 = 6$ elementi con ordine diverso da 5 quindi il 3-Sylow deve essere normale, come pure il prodotto semidiretto del 3-Sylow per un 2-Sylow, cioè $\psi(G) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Poiché, chiuunque sia il gruppo di ordine 6, gli omomorfismi da $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sono nulli, si ha $\psi(G) \simeq \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ o $\psi(G) \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times S_3$ contro l'ipotesi $n_5 = 6$.

Abbiamo finalmente concluso che $n_5 = 1$ e quindi il gruppo G si scrive come prodotto semidiretto

$$G \simeq S \rtimes H$$

dove S è il suo unico 5-Sylow, quindi $G \simeq \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \rtimes_f (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_g \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

La mappa $g : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ può essere banale o mandare un generatore c nell'automorfismo che scambia 1 e -1 in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. La mappa $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_g \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ ha il sottogruppo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nel nucleo, quindi il 3-Sylow di G è normale.

Il gruppo G è quindi isomorfo a $\mathbb{Z}/75\mathbb{Z} \rtimes_h \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dove per la mappa h ci sono solo 8 possibilità. La mappa h è un qualsiasi morfismo da $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il 2-Sylow di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/75\mathbb{Z})$. In particolare identifichiamo il fattore $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ con il 2-Sylow di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})$ e $\mathbb{Z}/2$ con $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3)$. Le 8 possibilità sono date da:

(a) $h_1(1) = (0,0)$ e in questo caso il gruppo G è abeliano, $G = \mathbb{Z}/300\mathbb{Z}$;

(b) $h_2(1) = (0,1)$ e in questo caso $G = \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times S_3$ e $Z(G) \simeq \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$;

(c) $h_3(1) = (1,0)$ e $h_4(1) = (3,0)$: in entrambi i casi $Z(G) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e i due omomorfismi danno due gruppi isomorfi in quanto possiamo ottenere h_4 da h_3 precomponendo con l'automorfismo non banale di $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;

(d) $h_5(1) = (1,1)$ e $h_6(1) = (3,1)$: in entrambi i casi $Z(G) \simeq \{0\}$ e i due omomorfismi danno due gruppi isomorfi in quanto possiamo ottenere h_6 da h_5 precomponendo con l'automorfismo non banale di $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;

(e) $h_7(1) = (2,0)$, con $Z(G) \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$;

(f) $h_8(1) = (2,1)$, con $Z(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.