

COMPITO DI ALGEBRA 1

12 giugno 2018

Esercizio 1a. Sia G un gruppo di ordine $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.

1. Mostrare che G ha sottogruppi abeliani di ordine 77 e di ordine 99.
2. Dire se il centro di G può essere banale e costruire un esempio di un gruppo G non abeliano.

Esercizio 2.

1. Sia $n = pa$, dove p è un primo e $1 \leq a < p$. Calcolare l'ordine di un p -Sylow di S_n e mostrare che un tale sottogruppo di Sylow è abeliano.
2. Sia H un p -Sylow di S_{2p} per $p > 2$, mostrare che $Z_{S_{2p}}(H) = H$ e calcolare il numero di p -Sylow di S_{2p} .

Esercizio 3. Consideriamo l'anello $A = \mathbb{Z}[x]/(x^3 - 1)$.

1. Mostrare che A non è un dominio di integrità;
2. Mostrare che A ha un quoziente isomorfo a \mathbb{Z} e uno isomorfo a $\mathbb{Z}[\zeta_3]$, dove ζ_3 è una radice terza primitiva dell'unità.
3. Dare un esempio di un elemento di A che non sia né invertibile né divisore di zero.

Esercizio 4. Siano \mathbb{F} il campo di spezzamento di $x^3 - 3$ ed \mathbb{K} il campo di spezzamento di $x^6 + 3$ su \mathbb{Q} .

1. Determinare se $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ e se $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$.
2. Calcolare il gruppo di Galois di \mathbb{K} su \mathbb{Q} .

Lo svolgimento degli esercizi 1 e 3 va fatto in un foglio separato.