

COMPITO DI ALGEBRA 1

13 settembre 2019

1. Sia G un gruppo di ordine $2 \cdot 3 \cdot 7$ e sia $g \in G$ un elemento di ordine 14. Supponiamo che G non contenga elementi di ordine 6.
 - (a) Dimostrare che $\langle g \rangle$ non è normale in G .
 - (b) Dimostrare che $\langle g^2 \rangle$ è contenuto nel centro di G .
2. Siano G un gruppo finito, p un numero primo che divide l'ordine del gruppo, e n_p il numero dei p -sottogruppi di Sylow di G . Dimostrare che l'insieme dei normalizzatori dei p -sottogruppi di Sylow costituisce una classe di coniugio dei sottogruppi di G che ha esattamente n_p elementi.
3. Sia A un anello commutativo con identità.
 - (a) Supponiamo che per ogni ideale I di A valga $\sqrt{I} = I$. Dimostrare che, se k è un intero positivo e J, L sono ideali di A per cui $J^k = L^k$, allora $J = L$.
 - (b) Supponiamo invece che esista un ideale I di A con $I = I^2$ e tale che $\sqrt{I} \neq I$. Dimostrare che esistono due ideali distinti di A , J e L , per cui $J^k = L^k$ per ogni $k > 1$.
 - (c) Dimostrare che, se $\sqrt{I} \neq I$ e la catena discendente di ideali $I \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \dots$ è stazionaria, allora esiste un ideale I_0 di A tale che $I_0 = I_0^2$ e $\sqrt{I_0} \neq I_0$.
4. Sia $\alpha = \sqrt[5]{5 + \sqrt{24}} \in \mathbb{R}$.
 - (a) Mostrare che $\mathbb{Q}(\alpha, \zeta_5)$ è un'estensione di Galois di \mathbb{Q} .
 - (b) Per ogni intero j sia $\beta_j = \alpha \zeta_5^j + \frac{1}{\alpha \zeta_5^j}$. Determinare, in funzione di j , il polinomio minimo di β_j su \mathbb{Q} .
 - (c) Dire se $\mathbb{Q}(\alpha + 1/\alpha)$ è un'estensione di Galois di \mathbb{Q} .