COMPITINO DI ALGEBRA 1
9 novembre 2020

Esercizio 1.
Sia $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ il gruppo ciclico con n elementi.

1. Sia $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ un omomorfismo. Dimostrare che il centro di $G \rtimes_\varphi G$ è non banale.
2. Nel caso $n = 21$ determinare le possibili cardinalità del centro di $G \rtimes_\varphi G$, al variare di φ fra gli omomorfismi $G \to \mathrm{Aut}(G)$.

Esercizio 2. Siano $\sigma = (1,2,3)(4,5,6)$ e $\tau = (1,3,5)(2,4,6)$, e sia G il sottogruppo di S_6 generato da σ e τ.

1. Dimostrare che G contiene un sottogruppo normale H di cardinalità 4.
2. Dimostrare che $G = \langle H, \sigma \rangle$.
3. Dimostrare che $G \cong A_4$.

Esercizio 3.
Sia G un gruppo di ordine $2^2 \cdot 7 \cdot 11$.

1. Dimostrare che G ha un sottogruppo normale di ordine 77.
2. Determinare le possibili classi di isomorfismo di G assumendo che G contenga un elemento di ordine 4.