**COMPITINO DI ALGEBRA 1**
9 novembre 2020

**Esercizio 1.**
Sia $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ il gruppo ciclico con $n$ elementi.

1. Sia $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ un omomorfismo. Dimostrare che il centro di $G \rtimes_\varphi G$ è non banale.
2. Nel caso $n = 21$ determinare le possibili cardinalità del centro di $G \rtimes_\varphi G$, al variare di $\varphi$ fra gli omomorfismi $G \to \mathrm{Aut}(G)$.

Soluzione.

1. Osserviamo che $\#\,\mathrm{Aut}(G) = \#\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \varphi(n) < n = |G|$, quindi $\phi$ ha nucleo non banale (altrimenti sarebbe iniettiva, ma questo è impossibile, perché il codominio ha cardinalità inferiore a quella del dominio). Sia $g$ un elemento non banale in $\ker \varphi$: affermiamo che allora $(0, g) \in G \rtimes_\varphi G$ è un elemento (chiaramente non banale) del centro. In effetti, visto che $G \rtimes_\varphi G$ è generato da $(1, 0)$ e $(0, 1)$, è sufficiente verificare che $(0, g)$ commuti con questi due elementi. Da un lato è chiaro che $(0, g)$ commuta con $(0, 1)$, perché questi sono entrambi elementi del sottogruppo (commutativo) $\{0\} \rtimes G \cong G$. D'altra parte,
$$(1, 0) \cdot (0, g) = (1 + \varphi(0)(0), g) = (1, g),$$
dove l'ultima uguaglianza vale perché $\varphi(0)$ è l'automorfismo identità, e
$$(0, g)(1, 0) = (0 + \varphi(g)(1), g) = (1, g),$$
dove l'ultima uguaglianza vale perché $g$ è nel nucleo di $\varphi$, quindi $\varphi(g)$ è l'identità di $G$. Abbiamo quindi mostrato che $(0, g)$ è nel centro di $G \rtimes_\varphi G$, come voluto.
2. Si ha
$$\mathrm{Aut}(G) \cong (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}.$$
Per risultati noti dalla teoria, esistono quindi $(21, 2)(21, 6) = 3$ diversi omomorfismi da $G$ ad $\mathrm{Aut}(G)$. Uno di questi è l'omomorfismo banale, che corrisponde alla struttura di prodotto diretto: in tal caso $Z(G \times G) = G \times G$ ha $21^2$ elementi. Gli altri due omomorfismi mandano il generatore $1 \in G$ in un elemento di ordine 3

in $\mathrm{Aut}(G)$ (e dall'isomorfismo scritto sopra vediamo subito che ci sono solo 2 tali elementi): è immediato vedere che le uniche possibilità per $\varphi(1) \in (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z})^\times$ sono 4 e $16 \equiv 4^2 \equiv 4^{-1} \pmod{21}$ (in effetti, $4^3 \equiv 64 \equiv 1 \pmod{21}$, quindi 4 è un elemento di ordine 3; l'unico altro tale elemento è il suo inverso). Osserviamo che in entrambi i casi il nucleo di $\varphi$ ha $\#\ker\varphi = \frac{\#G}{\#\,\mathrm{Imm}\,\varphi} = \frac{21}{3} = 7$ elementi.

Sia ora $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ uno dei due omomorfismi non banali. Come già osservato, un elemento $(a,b) \in G \rtimes_\varphi G$ è centrale se e solo se commuta con $(1,0)$ e $(0,1)$: si ha

$$(a,b)(1,0) = (a+\varphi(b)(1), b) \quad \text{e} \quad (1,0)(a,b) = (1+\varphi(0)(a), b) = (1+a, b),$$

questi due elementi sono uguali se e solo se $\varphi(b)(1) = 1$. Siccome $G$ è generato da 1, questo è equivalente al fatto che $\varphi(b)$ sia l'automorfismo identità, cioè accade se e solo se $b \in \ker\varphi$. Consideriamo ora

$$(a,b)(0,1) = (a+\varphi(b)(0), b+1) \quad \text{e} \quad (0,1)(a,b) = (0+\varphi(1)a, b+1);$$

questi elementi coincidono se e solo se $\varphi(1)a \equiv a \pmod{21}$. Nei due casi possibili per $\varphi(1)$ ci troviamo allora a studiare la congruenza $4a \equiv a \pmod{21}$ o $4^{-1}a \equiv a \pmod{21} \Leftrightarrow a \equiv 4a \pmod{21}$, che in entrambi i casi ha come soluzione $a \equiv 0 \pmod{7}$. Gli elementi centrali in $G \rtimes_\varphi G$ sono quindi le coppie $(a,b)$ con $a \in \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}\}$ e $b \in \ker\varphi$. Dato che $\ker\varphi$ ha 7 elementi, vediamo che il centro di $G \rtimes_\varphi G$ ha 21 elementi.

*Nota.* Siano $\varphi_1, \varphi_2 : G \to \mathrm{Aut}(G)$ i due omomorfismi non banali. È facile vedere che $\varphi_2 = \varphi_1^{-1}$; si ha allora $\varphi_2 = \varphi_1 \circ [-1]$, dove $[-1]$ denota l'automorfismo $x \mapsto -x$ di $G$. Da un risultato visto ad esercitazione segue che $G \rtimes_{\varphi_1} G \cong G \rtimes_{\varphi_2} G$. Questa osservazione non è comunque necessaria a risolvere il problema.

**Esercizio 2.** Siano $\sigma = (1,2,3)(4,5,6)$ e $\tau = (1,3,5)(2,4,6)$, e sia $G$ il sottogruppo di $S_6$ generato da $\sigma$ e $\tau$.

1. Dimostrare che $G$ contiene un sottogruppo normale $H$ di cardinalità 4.
2. Dimostrare che $G = \langle H, \sigma \rangle$.
3. Dimostrare che $G \cong A_4$.

Soluzione.

1. Calcoliamo innanzitutto $\rho_1 := \sigma\tau = (1,2,3)(4,5,6)(1,3,5)(2,4,6) = (2,5)(3,6)$. I coniugati di $\rho_1$ tramite $\sigma$ e $\tau$ sono

$$\sigma\rho_1\sigma^{-1} = (\sigma(2), \sigma(5))(\sigma(3), \sigma(6)) = (3,6)(1,4)$$

e

$$\tau\rho_1\tau^{-1} = (\tau(2),\tau(5))(\tau(3),\tau(6)) = (4,1)(5,2).$$

Vediamo quindi che ognuno degli elementi $\rho_1$, $\rho_2 := \sigma\rho\sigma^{-1}$ e $\rho_3 := \tau\rho\tau^{-1}$ è prodotto di alcune fra le tre trasposizioni $(1,4)$, $(2,5)$ e $(3,6)$. Queste trasposizioni sono disgiunte, quindi commutano fra loro e il sottogruppo di $G$ da loro generato è abeliano. Di conseguenza anche $\rho_1,\rho_2,\rho_3$ generano un sottogruppo commutativo $H$ di $G$. Dato che $\rho_1\rho_2 = \rho_3$, il sottogruppo $H$ ha cardinalità 4, ed è formato dai quattro elementi $\{\mathrm{id},\rho_1,\rho_2,\rho_3\}$. Infine, dato che $\sigma$ e $\tau$ generano $G$, per verificare la normalità di $H$ in $G$ è sufficiente verificare che $\sigma H\sigma^{-1} = H$ e $\tau H\tau^{-1} = H$. Siccome $H = \langle\rho_1,\rho_2\rangle$, è sufficiente verificare le quattro condizioni

$$\sigma\rho_1\sigma^{-1} = \rho_2 \in H, \quad \tau\rho_1\tau^{-1} = \rho_3 \in H$$

$$\sigma\rho_2\sigma^{-1} = (1,4)(2,5) = \rho_3 \in H, \quad \tau\rho_2\tau^{-1} = (4,1)(5,2) = \rho_1 \in H.$$

Dato che queste sono tutte soddisfatte, concludiamo come voluto che $H$ è normale in $G$.

2. Da un lato si ha $\langle H,\sigma\rangle \subseteq G$ in quanto $H \subseteq G$ e $\sigma \in G$. Dall'altro, $\langle H,\sigma\rangle$ contiene $\langle\rho_1,\sigma\rangle = \langle\sigma\tau,\sigma\rangle = \langle\sigma,\tau\rangle = G$ (in un gruppo si ha sempre $\langle a,b\rangle = \langle ab,a\rangle$: la doppia inclusione è immediata da verificare usando $b = a^{-1}(ab)$).

3. Dal primo punto sappiamo che $H \triangleleft G$, dal secondo abbiamo che $G$ è generato da $H$ e da $\langle\sigma\rangle$, e d'altro canto $H \cap \langle\sigma\rangle = \{\mathrm{id}\}$ visto che $\langle\sigma\rangle$ ha cardinalità 3 e $H$ ha cardinalità 4. Abbiamo quindi verificato tutte le ipotesi necessarie per poter affermare che $G \cong H \rtimes_\psi \langle\sigma\rangle$ per una opportuna $\psi$. Più precisamente, dal calcolo già svolto sappiamo che $\psi(\sigma)$ è l'automorfismo di $H$ che permuta $\rho_1,\rho_2,\rho_3$ mandando $\rho_1 \mapsto \rho_2 \mapsto \rho_3 \mapsto \rho_1$.

   Mostriamo ora che anche $A_4$ è isomorfo al medesimo prodotto semidiretto. In effetti, $A_4$ contiene un sottogruppo normale $H'$, isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, costituito dall'identità e dai 3 elementi $\rho_1' = (1,2)(3,4), \rho_2' = (2,3)(1,4), \rho_3' = (1,3)(2,4)$. Contiene anche un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, generato da $\sigma' = (1,2,3)$; si ha $H' \cap \langle\sigma'\rangle = \{\mathrm{id}\}$ e $H'\langle\sigma'\rangle = A_4$ per questioni di cardinalità. Ne segue che $A_4 \cong H' \rtimes_{\psi'} \langle\sigma'\rangle$, dove $\psi'(\sigma')$ è l'automorfismo di $H'$ dato dal coniugio per $\sigma$. Si verifica immediatamente che questo manda $\rho_1' \mapsto \rho_2' \mapsto \rho_3' \mapsto \rho_1'$. Otteniamo quindi come voluto che $G \cong H \rtimes_\psi \langle\sigma\rangle$ e $A_4 \cong H' \rtimes_{\psi'} \langle\sigma'\}$ sono isomorfi tramite la mappa evidente che porta $(\rho_i,\sigma^k)$ in $(\rho_i',(\sigma')^k)$.

   *Seconda soluzione.* Dal fatto che $G = H\langle\sigma\rangle$ segue $|G| = |H|\cdot|\langle\sigma\rangle| = 12$. Vediamo che $G$ contiene quattro 3-Sylow: in effetti il numero $n_3$ di 3-Sylow divide 4, è congruo a 1 modulo 3, e non è uno (se ci fosse un solo 3-Sylow, $G$ conterrebbe esattamente 2 elementi di ordine 3. Ma $G$ ne contiene almeno 3, ovvero $\sigma, \sigma^2$ e $\tau$). L'azione di coniugio di $G$ sui suoi 3-Sylow fornisce allora un omomorfismo $\Phi : G \to S_4$. Studiamo $\ker \Phi$: un elemento $g$ appartiene a $\ker \Phi$ se e solo se $gPg^{-1} = P$ per ogni 3-Sylow $P$, cioè se e solo se $g$ sta nell'intersezione di tutti i normalizzatori dei 3-Sylow. D'altro canto, dai teoremi di Sylow sappiamo che $[G : N(P)] = n_3 = 4$, quindi $\# N(P) = 3$, e siccome $P < N(P)$ si ha $N(P) = P$ per ogni 3-Sylow $P$. Siccome i 3-Sylow si intersecano banalmente (basta considerare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle = \{\mathrm{id}\}$) otteniamo che $\Phi$ è iniettivo, e quindi che $G \cong \Phi(G)$ è un sottogruppo di $S_4$ di indice 2. Come noto, l'unico tale sottogruppo è $A_4$, quindi $G \cong \Phi(G) \cong A_4$ come voluto.

**Esercizio 3.**
Sia $G$ un gruppo di ordine $2^2 \cdot 7 \cdot 11$.

1. Dimostrare che $G$ ha un sottogruppo normale di ordine 77.

2. Determinare le possibili classi di isomorfismo di $G$ assumendo che $G$ contenga un elemento di ordine 4.

Soluzione.

1. Sia $n_{11}$ il numero degli 11-Sylow di $G$. Dai teoremi di Sylow abbiamo $n_{11} \equiv 1 \pmod{11}$ e $n_{11} \mid 2^2 \cdot 7$, e l'unica possibilità è $n_{11} = 1$. Ciò mostra che in ogni gruppo di ordine $2^2 \cdot 7 \cdot 11$ esiste un unico sottogruppo di ordine 11, che quindi è normale. Sia $P$ tale sottogruppo e sia $\pi \colon G \to G/P$ la mappa di proiezione. $G/P$ è un gruppo di ordine $2^2 \cdot 7$ e ragionando come sopra otteniamo che $G/P$ contiene un unico sottogruppo $\mathcal{H}$ di ordine 7, che è quindi un sottogruppo normale. Per il teorema di corrispondenza $H = \pi^{-1}(\mathcal{H})$ è un sottogruppo normale di $G$ tale che $[G : H] = [G/P : \mathcal{H}] = 28/7 = 4$, quindi $H$ ha ordine 77.

2. Indichiamo con $S$ un 2-Sylow di $G$. Si ha $S \cap H = \{e\}$ e $|SH| = |S||H|/|S \cap H| = 4 \cdot 77/1 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11$ quindi $G = SH$ e poiché $H$ è normale in $G$ si ha
$$G \cong H \rtimes_\varphi S,$$
dove $H \cong \mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$ (dato che 77 è il prodotto di due primi e $7 \nmid 11 - 1$). Nell'ipotesi che $G$ contenga un elemento di ordine 4, anche $S$ è ciclico in quanto tutti i 2-Sylow di $G$ sono isomorfi e $G$ contiene un elemento di ordine 4. Ne segue che
$$G \cong \mathbb{Z}/77\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

dove

$$\varphi\colon \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$$

è un omomorfismo che definisce la legge di moltiplicazione tra gli elementi di $H$ e quelli di $S$.

Poiché $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ è un gruppo ciclico, $\varphi$ è definita assegnando il valore di $\varphi(\overline{1})$ che deve essere un elemento di ordine divisore di 4. Dato che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ e $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}^*$ si ha che $\varphi(1)$, visto come elemento di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$, può assumere solo i valori $(\pm\,\mathrm{id}, \pm\,\mathrm{id})$.

Questo significa che abbiamo al più quattro gruppi non isomorfi nella classe considerata. Vediamo che le quattro classi corrispondenti alle quattro scelte di $\varphi$ danno effettivamente gruppi non isomorfi, in quanto hanno centro diverso. Infatti, possiamo generare ognuno di questi gruppi con un elemento di ordine 11, uno di ordine 7 e uno di ordine 4 (anche con un elemento di ordine 77 e uno di ordine 4, ma la scelta precedente ci è più comoda). Gli elementi di ordine 7 commutano con quelli di ordine 11 perché appartengono alla stessa componente ciclica; inoltre gli elementi di ordine 4 commutano con il sottogruppo di ordine 11 (o di ordine 7) se e solo se la relativa componente di $\varphi$ è l'identità. Ne segue che:

• per $\varphi(1) = (\mathrm{id}, \mathrm{id})$ il prodotto è diretto e in questo caso otteniamo il gruppo ciclico $Z/308\,\mathbb{Z}$;

• per $\varphi(1) = (-\,\mathrm{id}, \mathrm{id})$ otteniamo un gruppo $G_1$ il cui centro contiene elementi di ordine 11 e non contiene elementi di ordine 7;

• per $\varphi(1) = (\mathrm{id}, -\,\mathrm{id})$ otteniamo un gruppo $G_2$ il cui centro contiene elementi di ordine 7 e non contiene elementi di ordine 11;

• infine la scelta $\varphi(1) = (-\,\mathrm{id}, -\,\mathrm{id})$ dà un gruppo $G_3$ il cui centro non contiene elementi di ordine 7 né elementi di ordine 11.

I quattro gruppi danno quindi quattro classi di isomorfismo distinte.

Anche se non è necessario ai fini della soluzione dell'esercizio, possiamo osservare che il centro di ognuno di questi gruppi contiene un elemento di ordine 2, in quanto vale sempre $\varphi(2) = (\mathrm{id}, \mathrm{id})$, e quindi $Z(G_1) \cong \mathbb{Z}/22\,\mathbb{Z}$, $Z(G_2) \cong \mathbb{Z}/14\,\mathbb{Z}$ e $Z(G_3) \cong \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$.