COMPITO DI ALGEBRA 1

5 febbraio 2021

Esercizio 1.
Sia G un gruppo finito, N un sottogruppo normale e $x \in N$. Sia A la classe di coniugio di x in G e C il centralizzatore di x in G. Dimostrare che l'azione di coniugio di N su A ha $[G : NC]$ orbite, tutte con lo stesso numero di elementi.

Esercizio 2.
Consideriamo il gruppo $G = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dove $\phi\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ è l'unico omomorfismo tale che $\phi(\bar{1})$ sia l'automorfismo $a \mapsto 4a$ di $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

1. Dimostrare che G ha un sottogruppo caratteristico isomorfo a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
2. Determinare tutti i sottogruppi normali e non caratteristici di G.

Esercizio 3.

1. Sia A un anello commutativo con unità. Dimostrare che A è isomorfo al prodotto di due anelli (non banali, commutativi, con identità) se e solo se esiste $\varepsilon \in A \setminus \{0, 1\}$ tale che $\varepsilon^2 = \varepsilon$.
2. Sia $A = \mathbb{Q}[x, y]/(x^2 - y^2)$. Dimostrare che A **non** è isomorfo al prodotto di due anelli (non banali, commutativi, con identità).

Esercizio 4. Sia M in campo di spezzamento del polinomio $f(x) = (x^4 - 3)(x^3 - 5)$.

1. Determinare il grado di $M/\mathbb{Q}$.
2. Descrivere il gruppo di Galois di $M/\mathbb{Q}$ come prodotto semidiretto di sottogruppi non banali.