COMPITO DI ALGEBRA 1

15 gennaio 2021

Esercizio 1.
Sia $G = \frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{27\mathbb{Z}}$, sia A il gruppo degli automorfismi di G, e sia B il sottogruppo di A dato da $B = \{\psi \in A : \psi(x) = x \text{ per ogni } x \in G \text{ tale che } 3x = 0\}$.

1. Sia $\psi \in B$. Dimostrare che $\psi^3((1,0)) = (1,0)$.
2. Dimostrare che $\#B$ è una potenza di 3.
3. Determinare l'insieme dei numeri primi che dividono $\#A$.

Esercizio 2. Per ogni intero positivo n, sia A_n il gruppo alterno su n elementi.

1. Dimostrare che per ogni intero positivo n il gruppo S_n si immerge in A_{n+2}.
2. Determinare la classe di isomorfismo dei 2-sottogruppi di Sylow di A_6 e il loro numero.

Esercizio 3.
Sia K un campo e sia A il sottoanello di $K(x)$ definito da

$$A = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in K[x], \mathrm{mcd}(g(x), (x^2-2)(x^3-7)) = 1 \right\}.$$

1. Dimostrare che ogni ideale di A è principale e generato da un polinomio di $K[x]$.
2. Determinare gli ideali primi di A per $K = \mathbb{F}_{13}$ e per $K = \mathbb{F}_{13^2}$.

Esercizio 4.
Sia $K = \mathbb{Q}(\zeta_{24})$ e sia $a \in \mathbb{Z}$. Denotiamo con M il campo di spezzamento del polinomio $x^3 - a$ su K. Determinare, in funzione di a, il grado dell'estensione $M/\mathbb{Q}$ e il suo gruppo di Galois.