SOLUZIONI DEL 1^0 COMPITINO DI ALGEBRA 1
9 novembre 2012

Esercizio 1.
Sia $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
a) Contare il numero dei sottogruppi di G di ogni possibile ordine.
b) Dimostrare che tutti i sottogruppi di G di ordine 4 sono caratteristici.

Soluzione esercizio 1. (a) G è un gruppo di ordine 16, quindi i suoi sottogruppi avranno ordine 1,2,4,8,16. Come sempre l'unico sottogruppo di ordine 1 è quello costituito dalla sola identità $\{(0,0)\}$ e quello di ordine 16 è G stesso.

- Sottogruppi di ordine 2: sono necessariamente ciclici e generati di un elemento di ordine 2. Gli elementi di ordine 2 sono contenuti nel sottogruppo $G_2 = \{(x,y) \in G \,|\, 2(x,y) = (2x,2y) = (0,0)\} = 4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ci sono quindi 3 elementi di ordine 2 ognuno dei quali genera un diverso sottogruppo di ordine 2. I sottogruppi di ordine 2 sono quindi 3 e precisamente $\langle(0,1)\rangle$, $\langle(4,1)\rangle$, $\langle(4,0)\rangle$

- Sottogruppi di ordine 4: possono essere isomorfi a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ o a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sappiamo che il numero di sottogruppi ciclici di ordine 4 si calcola con la formula $\frac{\text{n. elementi di ordine 4}}{\phi(4)}$; poiché $(x,y) \in G$ ha ordine 4 se e solo se x ha ordine 4 (cioè se $x = 2$ oppure $x = 6$) abbiamo che i sottogruppi di ordine 4 sono $\frac{\phi(4)\cdot 2}{\phi(4)} = 2$, e si verifica che sono $\langle(2,0)\rangle$, $\langle(2,1)\rangle$.
I sottogruppi di G di isomorfi a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hanno elementi di ordine 1 o 2 e sono quindi contenuti in G_2 e, per motivi di cardinalità, c'è un solo sottogruppo di questo tipo.

- Sottogruppi di ordine 8. I gruppi abeliani di ordine 8 sono 3 ma G non ha sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z}2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ perché contiene solo 3 elementi di ordine 2. Contiamo quindi i sottogruppi ciclici e quelli isomorfi a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
#sgr. ciclici di ordine $8 = \frac{\text{n. elementi di ordine 8}}{\phi(8)} = \frac{\phi(8)\cdot 2}{\phi(8)} = 2$ ed è facile vedere che sono $\langle(1,0)\rangle, \langle(1,1)\rangle$.
Infine, G ha un solo sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, perché un tale sottogruppo deve esser contenuto in $G_4 = 2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) G ha un unico sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, quindi questo è necessariamente caratteristico. I sottogruppi ciclici di ordine 4 sono $\langle(2,0)\rangle$, $\langle(2,1)\rangle$. Osserviamo che $\langle(2,0)\rangle = 2G$, quindi è caratteristico perchè per ogni $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$ vale $\psi(2G) = 2\psi(G) = 2G$. Di conseguenza anche $\langle(2,1)\rangle$ è caratteristico perché ha come possibile immagine solo se stesso.

Esercizio 2.
a) Calcolare la cardinalità del centralizzatore e del normalizzatore in S_8 di $\sigma = (1,2,3,4,5)(6,7,8)$.
b) Determinare il minimo n tale che S_n ha un sottogruppo isomorfo a D_{15}.
c) Determinare il minimo n tale che A_n ha un sottogruppo isomorfo a D_{15}.
Soluzione esercizio 2. (a) Applichiamo le formule note per la cardinalità di normalizzatore e centralizzatore di σ. Indicando con $C(\sigma)$ la classe ci coniugio di σ e osservando che σ ha ordine 15, si ha:

$$|Z_{S_8}(\sigma)| = \frac{|S_8|}{|C(\sigma)|} = \frac{8!}{\binom{8}{5}\cdot 4! \cdot \binom{3}{3}\cdot 2!} = 15,$$

(da cui otteniamo anche $Z(\sigma) = \langle\sigma\rangle$) e

$$N_{S_8}(\sigma) = \phi(15)\cdot|Z_{S_8}(\sigma)| = 120.$$

(b) S_n ha un sottogruppo isomorfo a D_{15} se e solo se esistono $\rho, \eta \in S_n$ tali che $\mathrm{ord}(\rho) = 15$, $\mathrm{ord}(\eta) = 2$ e $\eta\rho = \rho^{-1}\eta$. Con tale scelta si ha infatti $\eta \in N_{S_n}(\rho)$ e quindi $\langle \rho, \eta \rangle \cong \langle \rho \rangle \rtimes \langle \eta \rangle \cong D_{15}$. La condizione che S_n contenga un elemento di ordine 15 dà $n \geq 8$; vediamo che $n = 8$ funziona. Infatti, scegliamo come ρ la permutazione σ del punto (a). Cerchiamo η tale che $\eta(1,2,3,4,5)(6,7,8)\eta^{-1} = (5,4,3,2,1)(8,7,6)$: si calcola che una soluzione è $\eta = (1,5)(2,4)(6,8)$ che ha proprio ordine 2. Per quanto detto il sottogruppo $\langle \sigma, \eta \rangle$ è isomorfo a D_{15}.

c) Ragionando come al punto (b) abbiamo che $n \geq 8$ in quanto A_n deve contenere una permutazione ρ di ordine 15; l'altra condizione è che esista $\eta \in A_n$ di ordine 2 tale che $\eta\rho\eta^{-1} = \rho^{-1}$. Osserviamo che per $n = 8$ questa seconda condizione non è verificata in quanto, a meno di rinominare gli elementi, possiamo supporre che la permutazione di ordine 15 sia $\sigma = (1,2,3,4,5)(6,7,8)$ e le permutazioni di S_8 che verificano la condizione $\eta\sigma\eta^{-1} = \sigma^{-1}$ sono quelle della classe laterale $(1,5)(2,4)(6,8)Z_{S_8}(\sigma) = (1,5)(2,4)(6,8)\langle \sigma \rangle$ che sono tutte permutazioni dispari. Per $n = 9$ la situazione è identica in quanto le permutazioni di ordine 15 sono sempre quelle del tipo $(1,2,3,4,5)(6,7,8)$ e le permutazioni $\eta \in S_9$ tali che $\eta(1,2,3,4,5)(6,7,8)\eta^{-1} = (5,4,3,2,1)(8,7,6)$ sono quelle della classe laterale $(1,5)(2,4)(6,8)Z_{S_9}(\sigma) = (1,5)(2,4)(6,8)\langle \sigma \rangle$, quindi sono tutte dispari. In A_{10} troviamo invece un sottogruppo isomorfo a D_{15}: tale sottogruppo è generato di $\rho = (1,2,3,4,5)(6,7,8)$, che ha ordine 15, e da $\eta = (1,5)(2,4)(6,8)(9,10)$ che ha ordine 2 ed è una permutazione pari. Infatti dalla relazione dato che $\eta\rho\eta^{-1} = \rho^{-1}$ si ottiene, come al punto (b), che $\langle \rho, \eta \rangle \cong \langle \rho \rangle \rtimes \langle \eta \rangle \cong D_{15}$.