Algebra I

Esercizi

Anno accademico 2022-2023

1 03.10.2022

1. Meditare sul concetto di generatori.

2. Studiare il gruppo diedrale D_n, in particolare: rivedere prima del compitino

   (a) elencare i sottogruppi di D_n e dire quali sono normali;

   (b) descrivere le classi di coniugio in D_n;

   (c) trovare il centro di D_n;

   (d) descrivere in generale gli omomorfismi $D_n \to G$, dove G è un gruppo qualsiasi, e in particolare il gruppo degli automorfismi di D_n.

2 07.10.2022

1. Un sottogruppo H di G è detto *caratteristico* se per ogni $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ si ha $\phi(H) = H$. Sia ora $G = H \times K$, dove H, K sono gruppi finiti di cardinalità relativamente prime fra loro. Dimostrare che $H \times \{1\}$ e $\{1\} \times K$ sono caratteristici in G.

2. Siano H, K due gruppi finiti qualsiasi e sia $G = H \times K$. Dimostrare che $\mathrm{Aut}(H \times K)$ è isomorfo a $\mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K)$ se e solo se $H \times \{1\}$ e $\{1\} \times K$ sono caratteristici in G.

3. Classificare i gruppi di ordine p^2, dove p è un numero primo.

4. Sia G un gruppo finito e sia H un sottogruppo di G. Dimostrare che $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \neq G$.

5. Sia G un gruppo (finito) che agisce *transitivamente* sull'insieme X (*transitivamente* vuol dire che c'è una sola orbita, ovvero che ogni elemento di X può essere mandato in ogni altro elemento di X tramite l'azione di un opportuno elemento di G; equivalentemente, in simboli, $\forall x, y \in X\ \exists g \in G$ tale che $g \cdot x = y$). studiare domani

   (a) Siano $x, y \in X$. Dimostrare che i sottogruppi $\mathrm{Stab}_G(x)$ e $\mathrm{Stab}_G(y)$ di G sono coniugati fra loro.

   (b) Supponiamo che $|X| \geq 2$. Dimostrare che esiste un elemento $g \in G$ che agisce su X senza punti fissi, ovvero, esiste un elemento $g \in G$ tale che $g \cdot x \neq x$ per ogni $x \in X$.

6. Descrivere il gruppo $\mathrm{Aut}\left((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n\right)$.

3 10.10.2022

1. Il sottogruppo dei commutatori. Sia G un gruppo. Dati due elementi $x, y \in G$, il commutatore di x e y, a volte denotato $[x, y]$, è per definizione $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$. Il sottogruppo derivato, o sottogruppo dei commutatori, di G, è il sottogruppo di G **generato da** tutti gli elementi della forma $[x, y]$, al variare di $x, y \in G$. Si denota G'.

rivedere prima del compitino

(a) Si dimostri che G' è caratteristico in G.

(b) Si dimostri che G/G' è abeliano.

(c) Sia H un gruppo abeliano e sia $\varphi : G \to H$ un omomorfismo di gruppi. Si dimostri che $\ker \varphi \supseteq G'$.

(d) Dedurre che per ogni gruppo abeliano H si ha $\mathrm{Hom}(G, H) = \mathrm{Hom}(G/G', H)$.

2. Sia G un gruppo finito e $H < G$ un sottogruppo di indice uguale al più piccolo primo che divide $|G|$. Dimostrare che H è normale in G.

3. Dare una nuova dimostrazione del teorema di Cauchy tramite il seguente approccio. Sia G un gruppo finito di cardinalità divisibile per un numero primo p. Consideriamo l'insieme

$$X = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p : g_1 \cdots g_p = e\}.$$

Qual è la cardinalità di X? C'è un'azione di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ su X (quale? Data una p-upla $(g_1, \ldots, g_p)$ in X, anche $(g_p, g_1, g_2, \ldots, g_{p-1})$ è in X...). Le orbite possono essere solo di lunghezza 1 o p (perché?). Come sono fatte le orbite di lunghezza 1? Si osserverà che c'è almeno un'orbita "evidente" di lunghezza 1 (quale?). Dimostrare che il numero delle orbite di lunghezza 1 è divisibile per p. Dedurne il teorema di Cauchy.

4. Utilizzando un approccio simile a quello dell'esercizio precedente con il gruppo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dove $p \nmid n$, dimostrare il piccolo teorema di Fermat.

5. Sia G un gruppo di ordine 15.

(a) Dimostrare che G possiede un sottogruppo normale N di ordine 5

(b) Dimostrare che N è contenuto nel centro di G (pensare alla restrizione $\mathrm{Int}(G) \to \mathrm{Aut}(N)$)

(c) Dedurre che G è abeliano e quindi ciclico

6. (Teorema di Poincaré) Sia G un gruppo finito e sia H un sottogruppo di G di indice n. Allora esiste un sottogruppo N di G con le seguenti proprietà:

(a) N è normale in G;

(b) N è contenuto in H;

(c) $n \mid [G : N] \mid n!$.

rivedere prima del compitino

(In particolare, se un gruppo G contiene un sottogruppo H di indice n e $n! < \#G$, allora G non è semplice.)

7. ($\star$) Sia G un gruppo di ordine $2d$, dove d è dispari. Dimostrare che G possiede un sottogruppo (necessariamente normale) di indice 2. (*Indicazione.* Per questo esercizio può essere utile conoscere la definizione di A_n, il sottogruppo alternante del gruppo S_n, e pensare al teorema di Cayley.)

8. Esprimere $(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)$ come prodotto di cicli. Qual è l'ordine di questa permutazione?

9. Consideriamo le permutazioni $(1, 2, 3, 4, 5)$ e $(2, 5)(3, 4)$ di S_5. Che ordine ha il sottogruppo di S_5 da esse generato? Questo gruppo è ciclico?

4 14.10.2022 – Permutazioni

1. Un sottogruppo $G < S_n$ è detto **transitivo** se l'azione naturale di G sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è transitiva. Più esplicitamente: G è transitivo se per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esiste $\sigma \in G$ tale che $\sigma(i) = j$. Dimostrare che se $G < S_n$ è transitivo ed abeliano, allora $|G| = n$.

   Indicazione. Si cerchi di dimostrare che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ esiste **un unico** elemento $\sigma \in G$ tale che $\sigma(1) = i$. Per questo scopo è utile considerare $\mathrm{Stab}_G(i)$...

2. (Domanda proposta da Raffaele Rebechi) Scopo di questo esercizio è trovare la massima cardinalità di un sottogruppo abeliano di S_n. Per semplicità, consideriamo solo il caso $n = 3m$ (ma i casi $3m+1$ e $3m+2$ si trattano con minime modifiche): dimostreremo che in tal caso la massima cardinalità di un sottogruppo abeliano di S_n è 3^m.

   (a) Dimostrare che esiste un sottogruppo abeliano di S_n di cardinalità 3^m.

   (b) Sia $G < S_n$ un sottogruppo abeliano. Siano $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ le orbite per l'azione naturale di G su $\{1, \dots, n\}$. Spiegare come mai ci sono omomorfismi $\varphi_i : G \to S_{\Omega_i}$. Detta G_i l'immagine di φ_i, dimostrare che G è isomorfo ad un sottogruppo di $G_1 \times \cdots \times G_k$.

   (c) Con la notazione del punto precedente, dimostrare che ogni G_i è abeliano e che la sua azione è transitiva su Ω_i. Usando l'esercizio precedente, dedurre che $|G_i| = |\Omega_i|$.

   (d) Dedurre che $|G| \leq \prod_{i=1}^k |\Omega_i|$, dove $\sum_{i=1}^k |\Omega_i| = n$.

   (e) Esercizio non di Algebra 1: dimostrare che se $a_1, \dots, a_k$ sono interi con $\sum a_i = n = 3m$, allora $\prod a_i \leq 3^m$, con uguaglianza se e solo se tutti gli a_i sono uguali a 3.

   Indicazione: se uno degli a_i è ≥ 5, allora conviene sostituirlo con $2, (a_i - 2)$. Se uno degli a_i è 4, tanto vale sostituirlo con $2, 2$. Allora tutti gli addendi sono uguali a $1, 2$ o 3...

   (f) Se G è un sottogruppo abeliano di S_n, di cardinalità massima fra i sottogruppi abeliani, dedurre che $|G| = 3^m$ e che $|G_i| = 3$ per ogni i.

   (g) Usando il fatto che l'unico sottogruppo abeliano transitivo di S_3 è A_3, dimostrare che ogni G come al punto precedente è isomorfo a $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^m$, e che anzi più precisamente è generato da m tre-cicli a due a due disgiunti.

3. Quanti sono i k-cicli in S_n (con $n \geq k$)?

4. Determinare il centralizzatore di $(1, 2, 3)$ in S_{10}.

5. Dato un ciclo σ di S_n, determinare la decomposizione in cicli di σ^2.

6. Quali sono gli ordini degli elementi di S_5? Per ogni possibile ordine d, determinare il numero degli elementi di S_5 di ordine esattamente d e quanti di questi sono permutazioni pari/dispari.

7. Sia $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$. Determinare il centralizzatore di σ in S_5.

8. Descrivere le classi di coniugio in S_5 ed in A_5.

9. Si consideri una permutazione $\sigma \in A_n$, e sia C' la sua classe di coniugio in A_n. Sia poi C la classe di coniugio di σ in S_n. Si dimostri che $\#C'$ è uguale o a $\#C$, o a $\frac{1}{2}\#C$, e si caratterizzi per quali permutazioni vale $\#C' = \#C$. rivedere prima del compitino

10. Consideriamo l'elemento $\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7)(8, 9)$ di S_9. Sia H il centralizzatore di σ in S_9. Determinare la cardinalità di H. Dimostrare che H è abeliano. Dimostrare che in effetti $H \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

5 17.10.2022

1. Dimostrare che
$$A_n = \langle (i,j)(k,\ell) \mid i,j,k,\ell \in \{1,\dots,n\}, i \neq j, k \neq \ell \rangle.$$
Dimostrare poi che il sottogruppo di S_n generato da tutti i 3-cicli è A_n, per ogni $n \geq 3$.

2. Determinare la cardinalità e la struttura di gruppo del normalizzatore di $(1,2,3,4,5,6,7)$ in S_7.

3. Consideriamo $\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)$. Sia H il centralizzatore di σ in S_9. Dimostrare che H è isomorfo ad un prodotto semidiretto $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes S_3$.

4. Dimostrare che il gruppo A_5 è semplice.

   Nota. Si ricorda che un gruppo G è detto *semplice* se gli unici sottogruppi normali di G sono $\{e\}$ e G stesso.

   Indicazione. Non è difficile (ed è istruttivo) risolvere questo esercizio a mano. Si può anche sfruttare il seguente lemma (da dimostrare): sia N un sottrogruppo normale di G. Allora N contiene ogni elemento il cui ordine sia relativamente primo con $[G : N]$.

5. ($\star$) Dimostrare che A_n è semplice per ogni $n \geq 5$.

6 28.10.2022

6.1 Prodotti semidiretti

1. Dimostrare che $S_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes S_3$. Qual è l'azione di S_3 su $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$?

2. Determinare quanti elementi di ogni ordine ci siano nell'unico gruppo non abeliano di ordine 21.

3. Sia $n > 1$ un intero dispari, e sia $N = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici reali $n \times n$ con determinante 1. Dimostrare che esiste un omomorfismo non banale $\varphi : \mathbb{R}^\times \to \mathrm{Aut}(N)$ tale che
$$N \rtimes_\varphi \mathbb{R}^\times \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cong N \times \mathbb{R}^\times.$$
Questo fornisce un esempio della seguente situazione: dati N, H gruppi, il prodotto semidiretto $N \rtimes_\varphi H$ con φ omomorfismo *non banale* può essere isomorfo al corrispondente prodotto diretto $N \times H$.

4. Siano H, N gruppi, sia $H \to \mathrm{Aut}(N)$ un omomorfismo, e sia $f : H \to H$ un automorfismo di H. Dimostrare che allora
$$N \rtimes_\varphi H \cong N \rtimes_{\varphi \circ f} H.$$
rivedere prima del compitino

   Dedurre che (a meno di isomorfismo) esiste un solo gruppo non abeliano di ordine pq dove p, q sono primi e $p \mid q - 1$.

6.2 Teoremi di Sylow

1. Sia G un gruppo di ordine 44. Determinare il numero di elementi di G di ordine 11.

2. Dimostrare che ogni gruppo di ordine 45 è abeliano. Quanti gruppi di ordine 45 esistono (a meno di isomorfismo)?

3. Dimostrare che ogni gruppo G di ordine $3 \cdot 5 \cdot 17$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/(3 \cdot 5 \cdot 17)\mathbb{Z}$. *Provateci senza indicazioni! Se ne volete continuate a leggere...*

   (a) Dimostrare che il 17-Sylow H di G è normale.

   (b) Dimostrare che in effetti $H \subseteq Z(G)$.

   (c) Dedurre che $G/Z(G)$ è ciclico e concludere.

7 31.10.2022

7.1 Ancora permutazioni

1. Determinare, per ogni intero positivo $n \geq 5$, tutti i sottogruppi normali di S_n.

2. Determinare gli interi positivi n per cui S_n possiede un sottogruppo di ordine 21.

3. Determinare per quali primi p l'equazione

$$\sigma^p = (1, \ldots, p)(p+1, \ldots, 2p), \quad \sigma \in S_{2p}$$

studiare domani

ammette soluzione. Per tali primi determinare tutte le soluzioni di questa equazione.

7.2 Struttura di alcuni gruppi

1. Trovare per quali n fra 1 e 100 esiste un gruppo semplice non-abeliano di ordine n (per i più pigri: le cardinalità più interessanti da considerare sono 56, 72, 80; 84 può sembrare difficile, ma non lo è).

2. Dimostrare che A_5 è l'unico gruppo semplice di ordine 60. Una possibile strategia è la seguente:

   (a) Sia G un gruppo semplice di ordine 60. Dimostrare che il numero n_2 di 2-Sylow di G è 1, 3, 5 o 15.

   (b) Dimostrare che il numero di 5-Sylow di G è 6.

   (c) Escludere i casi $n_2 = 1$ (facile) e $n_2 = 3$ (considerare l'azione di G sui 2-Sylow).

   (d) Dimostrare che se $n_2 = 5$ allora $G \cong A_5$.

   (e) Supporre ora $n_2 = 15$. Confrontando 2-Sylow e 5-Sylow, dedurre che ci sono due 2-Sylow S_1 e S_2 tali che $|S_1 \cap S_2| = 2$.

   (f) Posto $H = S_1 \cap S_2$ e $N = N_G(H)$, dimostrare che $4 \mid \#N$, che $\#N > 4$, e che $\#N \mid 60$. Dedurre che $\#N \geq 12$. Concludere.

8 04.11.2022

1. Quanti sottogruppi isomorfi a D_5 contiene S_5?

2. Trovare tutte le soluzioni in S_6 dell'equazione $\sigma^4 = (1, 2, 3)$.

3. ($\star$) Sia H un sottogruppo di S_n di indice n. Dimostrare che H è isomorfo a S_{n-1}.

4. Verificare che $A_4 = \langle (1, 2, 3), (1, 2)(3, 4) \rangle$. Dedurne prima $\# \operatorname{Aut}(A_4) \leq 24$ e poi che $\operatorname{Aut}(A_4) \cong S_4$.

5. Determinare i possibili ordini del centro di un gruppo di ordine 75.

6. Sia $G := S_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

   (a) Dimostrare che i sottogruppi $\{\text{id}\} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e $S_3 \times \{0\} \times \{0\}$ sono caratteristici in G.

   (b) Calcolare $\# \operatorname{Aut}(G)$.

7. Dimostrare che – a meno di isomorfismo – esistono esattamente due gruppi di cardinalità 105.

9 07.11.2022

1. (126) Sia G un gruppo di ordine 399.

   (a) Mostrare che G è isomorfo ad un prodotto semidiretto di gruppi ciclici.

   (b) Che ordine può avere il centro di G? Dare un esempio per ogni possibile ordine.

2. (88) Classificare, a meno di isomorfismo, i gruppi di ordine 2013.

3. Determinare il numero di (classi di isomorfismo di) gruppi abeliani di cardinalità $16 \cdot 9$.

4. Sia $H = \langle (1,2,3,4,5,6),(1,4) \rangle < S_6$ un sottogruppo di S_6. In questo esercizio vedremo che H non è l'intero S_6 (quindi in particolare non è vero che un n-ciclo e una trasposizione qualsiasi generano sempre S_n) e lo descriveremo completamente.

   (a) Dimostrare che $24 \mid \#H$.

   (b) Sia $\tau = (1,4)(2,5)(3,6)$. Dimostrare che τ è un elemento di H. Dimostrare che in effetti τ è contenuto nel centro di H.

   (c) Dedurre che $H \subseteq Z_{S_6}((1,4)(2,5)(3,6))$. Sia $K = Z_{S_6}((1,4)(2,5)(3,6))$.

   (d) Mostrare che $\#K = 48$. Dedurne in particolare che $\#H \in \{24, 48\}$ e che $H \neq S_6$.

   (e) Dimostrare che K è isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes S_3$.

   (f) Osservare che c'è un omomorfismo naturale $\pi : K \to S_3$. Determinare $\pi(H)$ e dedurre che $\#H = 24$, e anzi più precisamente che $H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

5. Sia $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.

   (a) Ricordare perché il determinante $\det : G \to \mathbb{F}_3^\times$ è un omomorfismo di gruppi.

   (b) Il nucleo dell'applicazione det è detto il gruppo *speciale lineare* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$. Determinare la cardinalità di $H := \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.

   (c) Determinare $Z(G)$ e mostrare in particolare che è un sottogruppo di H.

   (d) Dimostrare che il quoziente $H/Z(G)$ è isomorfo ad A_4.

   (e) Dimostrare che H contiene un unico 2-Sylow, che chiameremo J.

   (f) Mostrare che J non è abeliano. A quale gruppo 'famoso' è isomorfo?

   (g) ($\star$) Dimostrare che J coincide con il sottogruppo derivato di H.

6. (Il gruppo delle sostituzioni lineari) Dimostrare che l'insieme $\{ax + b \mid a \in \mathbb{F}_p^\times, b \in \mathbb{F}_p\}$ ha una struttura naturale di gruppo con la quale è isomorfo a $\mathbb{F}_p \rtimes \mathbb{F}_p^\times$.

   In particolare, questo descrive un gruppo non-abeliano di ordine $p(p-1)$ per ogni $p \geq 3$.

7. ($\star$) Costruire un automorfismo di S_6 che non sia interno. Un possibile modo di procedere è il seguente:

   (a) Dimostrare che S_5 possiede sei 5-Sylow.

   (b) Considerando l'azione di coniugio sui Sylow, costruire un omomorfismo iniettivo $S_5 \to S_6$. Osservare che l'immagine è un sottogruppo $H \cong S_5$ di S_6 *transitivo*, e quindi in particolare non è della forma $\mathrm{Stab}(i)$.

   (c) Considerando l'azione di moltiplicazione a sinistra di S_6 su S_6/H, costruire un ulteriore omomorfismo iniettivo (e quindi bigettivo) φ da S_6 a $\mathrm{Sym}_{S_6/H}$. Identificando $\mathrm{Sym}_{S_6/H}$ con S_6 in maniera opportuna (attenzione che qui c'è una sottigliezza!), dimostrare che $\varphi(H)$ è invece della forma $\mathrm{Stab}(j)$ per un opportuno j.

   (d) Dedurre che φ non è un automorfismo interno.

8. Siano p, q primi distinti, siano G, H rispettivamente un p-gruppo e un q-gruppo, e siano φ_1, φ_2 due omomorfismi $H \to \mathrm{Aut}(G)$. Dimostrare che, se i prodotti semidiretti $G \rtimes_{\varphi_1} H$ e $G \rtimes_{\varphi_2} H$ sono isomorfi, allora $\ker \varphi_1$ è isomorfo a $\ker \varphi_2$.

9. (Curiosità) Tolta la condizione che G, H siano gruppi di ordine potenza di primo, il risultato precedente è falso. Un controesempio con gruppi di ordine piccolo è il seguente: $S_3 \rtimes_{\varphi_1} S_3$ e $S_3 \rtimes_{\varphi_2} S_3$ sono isomorfi, dove φ_1 è banale e $\varphi_2(g) =$ il coniugio per g, per ogni $g \in S_3$. Verificare che questo è effettivamente un controesempio!

   Indicazione: scrivere $S_3 \times S_3$ come prodotto semidiretto di un sottogruppo *normale* isomorfo ad S_3 e di un sottogruppo *non normale* ancora isomorfo ad S_3.

10. Verificare che A_4 è l'unico sottogruppo di S_4 di indice 2.