Corso di Laurea in Matematica
Algebra 1 - Compito del 17/01/2020

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Aula: ....

Esercizio 1) Dare risposte sintetiche ad ogni domanda, come indicato, utilizzando solo lo spazio subito sotto.

a) Contare il numero di elementi di ordine 3 in in $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{81}$. [Scrivere per prima cosa il numero e motivare brevemente]

b) Contare il numero di sottogruppi di ordine 9 in $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{81}$. [Scrivere per prima cosa il numero e motivare brevemente]

c) Qual è il numero di sottogruppi di ordine 10 in S_5? [Scrivere per prima cosa il numero e motivare brevemente]

d) Sia H un sottogruppo di ordine 4 di A_5. Quanti elementi ha il normalizzatore (in A_5) di H? [Scrivere per prima cosa il numero e motivare brevemente]

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Esercizio 2. Sia N un gruppo di ordine p^α e H un gruppo di ordine q^β, con $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$.

a) Si consideri un prodotto semidiretto $G = N \rtimes_\varphi H$. Sia $\overline{N} = \{(n,e) \mid n \in N\}$ e $\overline{H} = \{(e,h) \mid h \in H\}$. Inoltre per ogni sottogruppo M di H definiamo analogamente $\overline{M} < \overline{H}$. Dimostrare che che $\overline{\ker\varphi} = \overline{H} \cap C(\overline{N})$, dove $C(\cdot)$ indica il centralizzatore di un sottogruppo di G.

b) Si considerino due prodotti semidiretti $G_1 = N \rtimes_{\varphi_1} H$ e $G_2 = N \rtimes_{\varphi_2} H$. Sia $f : G_1 \to G_2$ un isomorfismo. Analogamente a sopra chiamiamo $\overline{N}_i$ e $\overline{H}_i$ rispettivamente le copia di N ed H in G_i. Spiegare perché $f(\overline{N}_1) = \overline{N}_2$ e $f(\overline{H}_1)$ è un coniugato di $\overline{H}_2$.

c) Con la notazione del punto b), dimostrare che se G_1 è isomorfo a G_2 allora $\ker(\varphi_1)$ è isomorfo a $\ker(\varphi_2)$.

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Esercizio 3.

a) Calcolare il grado dell'estensione di campi
$$\mathbb{C}(X_1,\ldots,X_n) \supset \mathbb{C}(X_1^{d_1},\ldots,X_n^{d_n}),$$
dove $X_1,\ldots,X_n$ sono variabili e $d_1,\ldots,d_n$ sono interi positivi.

b) Trovare il grado dell'estensione di campi $[\mathbb{C}(X,Y) : \mathbb{C}(X^2Y^6, X^4Y^{21})]$, dove X, Y sono variabili.

c) Mostrare che l'estensione $\mathbb{C}(X^2Y^6, X^4Y^{21}) \subset \mathbb{C}(X,Y)$ è di Galois e descrivere il suo gruppo di Galois.