COMPITO DI ALGEBRA 1
16 febbraio 2018

Esercizio 1. Sia $\sigma \in S_{16}$ il prodotto di 2 3-cicli e 2 5-cicli, tutti disgiunti tra loro.

1. Descrivere $C_{S_{16}}(\sigma)$ come prodotto semidiretto;
2. mostrare che $C_{S_{16}}(\sigma)$ contiene un sottogruppo isomorfo a D_{15}.

Esercizio 2. Sia G un gruppo di ordine p^2q^2 con p, q due primi distinti e supponiamo $p < q$.

1. Mostrare che G non può essere semplice.
2. Detto $n(p, q)$ il numero di gruppi di ordine p^2q^2, determinare il minimo di $n(p, q)$.

Esercizio 3. Sia $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ e per ogni $\alpha = a + \sqrt{2}b \in A$ poniamo $N(\alpha) = a^2 - 2b^2$.

1. α è invertibile se e solo se $N(\alpha) = \pm 1$.
2. Contare gli ideali di A che contengono 7.
3. Mostrare che esistono P, Q ideali primi distinti di A tali che $P \cap \mathbb{Z} = Q \cap \mathbb{Z}$.
4. Mostrare che l'ideale $5A$ è primo.

Esercizio 4. Sia $a \in \mathbb{Z}$ e sia $f_a(x) = (x^{11} - 1)(x^3 - a)$. Denotiamo con K_a il campo di spezzamento del polinomio f_a su $\mathbb{Q}$. Determinare, al variare di a:

1. il gruppo di Galois di K_a su $\mathbb{Q}$;
2. il numero delle sottoestensioni E di K_a normali su $\mathbb{Q}$ tali che $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ è abeliano.

Lo svolgimento dell'esercizio 1 va fatto in un foglio separato.