COMPITO DI ALGEBRA 1

23 gennaio 2018

Esercizio 1. Sia p un primo e sia $\tau \in S_{3p}$ il prodotto di 3 p-cicli disgiunti.

1. Determinare, al variare di p, il numero delle soluzioni $\sigma \in S_{3p}$ dell'equazione $\sigma^p = \tau$.
2. Sia $p \geq 3$. Mostrare che S_{3p} ha un sottogruppo H isomorfo al gruppo diedrale D_p tale che $\tau \in H$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo di ordine 1045.

1. Dimostrare che il 19 Sylow di G è contenuto nel centro e determinare i possibili valori della cardinalità di $Z(G)$.
2. Mostrare che esiste un omomorfismo non banale $f\colon G \to \mathbb{Z}/154\mathbb{Z}$ se e solo se G è ciclico.

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo con identità. Un ideale proprio Q di A si dice *primario* se

$$\forall x, y \in A \text{ tali che } xy \in Q \text{ e } \ x \notin Q \Rightarrow y^n \in Q \text{ per qualche } \ n \in \mathbb{N}.$$

1. Mostrare che un ideale Q di A è primario se e solo se in A/Q ogni divisore di 0 è nilpotente.
2. Determinare gli ideali primari di $\mathbb{Z}[i]$ e quelli di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Sia $p(x) = x^4 - 2x^2 - 10$ e sia E il suo campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$.

1. Trovare dei generatori del campo di spezzamento E e calcolare il grado di $E/\mathbb{Q}$.
2. Calcolare $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.
3. Contare i sottocampi di E e descrivere esplicitamente quelli che sono estensioni di Galois di $\mathbb{Q}$.

Lo svolgimento degli esercizi 1 e 3 va fatto in un foglio separato.