Es n. 1

Sia $G < S_p$.

A) Se $p \nmid |G|$ allora per ragioni di ordine $N(G) = 1$.

Se $p \mid |G|$ studiamo il problema in base al numero $n_p(G)$ di p-Sylow di G.

B) Se $n_p(G) = 1$, ossia c'è un solo p-Sylow, possono accadere queste due situazioni

1. $|G| = p$. Allora $G \cong \mathbb{Z}/p$ è generato da un p-ciclo e $N(G) = p$ (ci sono p scelte per l'immagine del generatore).

2. $|G| > p$. Si noti che in S_p gli unici elementi che hanno ordine multiplo di p sono i p-cicli, che hanno ordine esattamente p.
Allora in G gli elementi che non appartengono all'unico p-Sylow P hanno ordine primo con p.
Se a è un tale elemento, e $f: G \to \mathbb{Z}/p$ omomorfismo, vale che $f(a) = 0$ per ragioni di ordine.

Sia ora c il generatore del p-Sylow P.

Dimostro che $f(c) = 0$. Infatti sia $a \in G - P$.

Allora $ac \notin P$. (se fosse $ac \in P$ allora

$ac = c^J$ e dunque $a = c^{J-1}$ apparterrebbe a P, assurdo).

Dunque $f(ac) = 0$ per l'asserzione precedente.

Ma $0 = f(ac) = f(a) + f(c) = 0 + f(c)$

da cui $f(c) = 0$.

Abbiamo mostrato che f è l'omomorfismo banale,

dunque $N(G) = 1$ in questo caso.

c)

Se $n_p(G) > 1$, dimostriamo che $N(G) = 1$.

Supponiamo per assurdo che esista

$$f : G \to \mathbb{Z}/p \text{ non banale}$$

Allora esiste un p-ciclo c t.c. $f(c) = 1$.

Sia $P = \langle c \rangle$ il corrispondente p-Sylow.

Vale che $|\mathrm{Ker}\, f| = \frac{|G|}{p}$ è primo con p.

(dato che la massima potenza di p che divide

$|S_p|$ e dunque che divide $|G|$, è p).
Si osserva inoltre che $\mathrm{Ker}\, f$ è normale in G e che

$$G = \mathrm{Ker}\, f \rtimes P.$$

Ora il gruppo $\mathrm{Ker}\, f$ agisce su $\{1, 2, \ldots, p\}$ e lo partiziona in orbite

$$\{1, 2, \ldots, p\} = X_1 \,\dot\cup\, X_2 \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, X_k$$

Osserviamo che **c** manda orbite in orbite.
Infatti per esempio $c X_1$ è ancora un'orbita per $\mathrm{Ker}\, f$: basta pensare che $\mathrm{Ker}\, f = c(\mathrm{Ker}\, f)c^{-1}$
Dunque la partizione $X_1 \,\dot\cup\, X_2 \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, X_k$ viene mandata in se stessa da c, che è un p-ciclo.
Le orbite devono dunque avere tutte la stessa cardinalità.
Dato che p è primo, questo può accadere solo se

$k = p$ e $|X_1| = |X_2| = \ldots = |X_p| = 1$ oppure se
$k = 1$ e $|X_1| = p$.
Nel primo caso $\mathrm{Ker}\, f = \{e\}$ e allora $G \cong P$ ma

questo è assurdo perchè eravamo nel caso $n_p(G) > 1$

Nel secondo caso, si avrebbe

$$p = |X_1| = \frac{|\mathrm{Ker}\, f|}{|\text{Stabilizzatore di un elemento di } X_1|}$$

ma allora $p \mid |\mathrm{Ker}\, f|$, assurdo perchè

$|\mathrm{Ker}\, f|$ era primo con p.

In conclusione è assurdo che esista $f : G \to \mathbb{Z}/p$ non banale, dunque $N(G) = 1$.