COMPITO DI ALGEBRA1

7 settembre 2018

Esercizio 1. Determinare i sottogruppi caratteristici del gruppo $G = \mathbb{Z}/9\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\,\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Diciamo che un gruppo finito G ha una *serie normale* se esiste un insieme $\mathcal{N} = \{N_1, \ldots, N_n\}$ di sottogruppi normali di G tali che vale la serie di inclusioni strette

$$\{e\} \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \ldots \subsetneq N_n \subsetneq G.$$

Diremo che il gruppo G ha una *serie principale* se ha una serie normale che non puó essere ulteriormente raffinata aggiungendo altri sottogruppi normali di G.

1. Mostrare che ogni serie normale di G può essere raffinata ad una serie principale.

2. Mostrare che se la serie normale $\mathcal{N} = \{N_1, \ldots, N_n\}$ è principale allora i gruppi quozienti N_{i+1}/N_i non hanno sottogruppi caratteristici non banali.

3. Mostrare con un esempio che il viceversa del punto precedente è falso.

Esercizio 3.

1. Sia $A = \mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi in una indeterminata con coefficienti razionali. Sia $I = (x)$ e poniamo $S = A \setminus I$. Mostrare che S è una parte moltiplicativa di A e determinare ideali e ideali primi di $S^{-1}A$.

2. Sia $B = \mathbb{Z}[x]$, sia J l'deale di B generato da x e sia T la parte moltiplicativa $B \setminus J$. Determinare se esiste un isomorfismo da $S^{-1}A$ a $T^{-1}B$.

Esercizio 4. Sia p un numero primo. Poniamo $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{2}, i)$.

1. Determinare i valori di p per i quali K è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$.

2. Sia E la più piccola estensione di K normale su $\mathbb{Q}$. Determinare il gruppo di Galois di $E/\,\mathbb{Q}$.

Lo svolgimento degli esercizi 1 e 3 va fatto in un foglio separato.