Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - I compitino - 18/12/2019.
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1) Siano X l'insieme dei numeri reali dotato della topologia della retta di Sorgenfrey (una cui base, lo ricordiamo, è data dagli insiemi della forma $[a,b)$, con $a<b$), ed $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali dotato della topologia euclidea.

(1) Sia $x_0 \in X$. Si determini la componente connessa C_{x_0} di x_0 in X.
(2) Si descrivano tutte le funzioni continue $f\colon \mathbb{R} \to X$.

Soluzione. (1) Dimostriamo che $C_{x_0} = \{x_0\}$ (cioè X è totalmente sconnesso). Ovviamente si ha $\{x_0\} \subseteq C_{x_0}$. Se esistesse $y \in C_{x_0} \setminus \{x_0\}$, posto $z = (x_0+y)/2$, la decomposizione

$$C_{x_0} = (C_{x_0} \cap (-\infty, z)) \cup (C_{x_0} \cap [z, +\infty))$$

darebbe una partizione di C_{x_0} in aperti disgiunti non vuoti, in quanto $x_0 \in C_{x_0} \cap (-\infty, z)$ e $y \in C_{x_0} \cap [z, +\infty)$. Dunque C_{x_0} sarebbe sconnesso, il che è assurdo.

In alternativa, notiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $[x_0, x_0+\varepsilon)$ è sia aperto sia chiuso. In particolare, esso è unione di componenti connesse, per cui per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $C_{x_0} \subseteq [x_0, x_0+\varepsilon)$. Dunque

$$C_{x_0} \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} [x_0, x_0+\varepsilon) \ = \ \{x_0\} \ ,$$

da cui la tesi.

(2): Sia $f\colon \mathbb{R} \to X$ continua. Poiché $\mathbb{R}$ è connesso, $f(\mathbb{R})$ è connesso. Per quanto visto in (1), ciò vuol dire che esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(\mathbb{R}) \subseteq C_{x_0} = \{x_0\}$, cioè f vale costantemente x_0. Poiché le funzioni costanti sono sempre continue, se ne deduce che $f\colon \mathbb{R} \to X$ è continua se e solo se è costante.

Esercizio 2) Sia

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 1,\ -2 \leq z \leq 2\}$$

e sia $\sim$ la relazione di equivalenza su A definita da $(x,y,z) \sim (x',y',z')$ se e solo se $(x,y,z) = (x',y',z')$ oppure $z = z' \in \{-2,0,2\}$. Sia poi $B = A/\sim$.

(1) Si descriva un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ omeomorfo a B (dimostrando che effettivamente lo è).
(2) Si dica se B sia una varietà topologica di dimensione 2.

Soluzione (1) Sia $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+(|z|-1)^2 = 1\}$, ovvero sia X l'unione delle sfere di raggio 1 centrate in $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$. Consideriamo la funzione

$$f\colon A \to X\,, \qquad f(x,y,z) = \left(x\sqrt{1-(|z|-1)^2}, y\sqrt{1-(|z|-1)^2}, z\right) \ .$$

È facile verificare che f è effettivamente ben definita, continua e a valori in X. Inoltre, f è surgettiva e $f(x,y,z) = f(x',y',z')$ se e solo se $(x,y,z) \sim (x',y',z')$. Dunque f induce una bigezione continua $\overline{f}$ tra B e X. Per mostrare che $\overline{f}$ è un omeomorfismo basta notare che A, essendo un chiuso limitato di $\mathbb{R}^3$, è compatto, mentre X, essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, è di Hausdorff. Dunque f è chiusa, ed è perciò un'identificazione. Ne segue che $\overline{f}$ è un omeomorfismo.

(2) Poiché B è omeomorfo a X, per rispondere alla domanda basta mostrare che X non è una 2-varietà topologica. Se lo fosse, infatti, ogni suo punto p avrebbe un intorno U_p omeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Poiché $\mathbb{R}^2 \setminus \{*\}$ è connesso per archi (per esempio, in quanto omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$), seguirebbe che $U_p \setminus \{p\}$ è connesso per archi, dunque connesso. Mostriamo invece che, se V è un qualsiasi intorno di $O = (0,0,0)$ in X, allora $V \setminus \{O\}$ è sconnesso. In effetti, se $H^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\}$ e $H^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z < 0\}$, allora $V \cap H^+$ e $V \cap H^-$ sono aperti disgiunti la cui unione dà $V \setminus \{O\}$. Inoltre, poiché O appartiene alla parte interna di V, gli insiemi $(V \setminus \{O\}) \cap H^+$ e $(V \setminus \{O\}) \cap H^-$ sono entrambi non vuoti. Ne segue che $V \setminus \{O\}$ non è connesso, per cui X (e dunque B) non è una 2-varietà.

Esercizio 3) Sia $X = [0,1]^{[0,1]}$ lo spazio delle funzioni da $[0,1]$ in $[0,1]$, dotato della topologia prodotto (che, ricordiamo, viene usualmente chiamata topologia della convergenza puntuale). Per ogni $f \in X$, sia $\mathrm{supp}(f) = \{x \in [0,1] \,|\, f(x) \neq 0\}$. Sia infine

$$Y = \{f \in X \,|\, \mathrm{supp}(f) \text{ ha cardinalità al più numerabile}\} .$$

(1) Si mostri che Y è denso in X.
(2) Si mostri che Y non è compatto.
(3) Si mostri che Y è compatto per successioni.

Soluzione. (1): Dimostriamo che Y interseca qualsiasi aperto non vuoto di X. Sia $U \subseteq X$ un aperto non vuoto. Per definizione di base, esiste $V \subseteq U$ aperto della base standard di X. Siano $x_1, \ldots, x_n$ punti di $[0,1]$ e $A_1, \ldots, A_n$ aperti non vuoti di $[0,1]$ tali che

$$V = \{f \in X \,|\, f(x_i) \in A_i \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n\} .$$

Scegliamo un punto $y_i \in A_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, e sia $g\colon [0,1] \to [0,1]$ definita da $g(x_i) = y_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $g(x) = 0$ altrimenti. Allora $g \in Y \cap V$. Ciò mostra che Y è denso.

(2): Ricordiamo che X, essendo prodotto di spazi T_2, è T_2. Dunque ogni sottoinsieme compatto di X è chiuso. Pertanto, se Y fosse compatto, avremmo $Y = \overline{Y} = X$, dove l'ultima uguaglianza è dovuta a quanto dimostrato in (1). Ma ovviamente $Y \neq X$ (per esempio, la funzione costantemente uguale a 1 non appartiene a Y), per cui Y non è compatto.

In alternativa, per ogni $x \in [0,1]$ sia $U_x = \{f \in X \,|\, f(x) \in [0, 1/2)\}$. Allora U_x è aperto in X per ogni $x \in [0,1]$, e $Y \subseteq \bigcup_{x \in [0,1]} U_x$, in quanto per ogni elemento $g \in Y$ esiste $x_0 \in [0,1]$ tale che $g(x_0) = 0$, per cui $g \in U_{x_0}$. Tuttavia, dato un insieme finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [0,1]$, la funzione $g \in X$ tale che $g(x_i) = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $g(x) = 0$ se $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$ è tale che $g \in Y \setminus (\bigcup_{i=1}^n U_{x_i})$. Ciò mostra che Y non è compatto.

(3): Sia f_n una successione in Y. Dobbiamo trovare una sottosuccessione di f_n che converga puntualmente ad una funzione $f \in X$.

Sia $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{supp}(f_n)$. Essendo unione numerabile di insiemi al più numerabili, A è al più numerabile. Enumeriamo dunque i punti di A, indicandoli con $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ (se A è finito, poniamo $a_{n+1} = a_n$ definitivamente, e se A è vuoto allora f_n è la funzione nulla per ogni $n \in \mathbb{N}$, per cui chiaramente f_n converge puntualmente a 0).

La successione $f_n(a_0)$, $n \in \mathbb{N}$, è contenuta in $[0,1]$, che è compatto, per cui esiste una scelta crescente di indici $k_0 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f_{k_0(n)}(a_0)$ converge ad un valore di $[0,1]$, che chiamiamo b_0.

Analogamente, la successione $f_{k_0(n)}(a_1)$ ammette una sottosuccessione convergente $f_{k_1(n)}(a_1)$, che converge a b_1. Continuando a procedere in questo modo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ è possibile costruire una sottosuccessione $f_{k_m(n)}(a_m)$ in modo tale che $k_m(n)$ sia estratta da $k_{m-1}(n)$, e $f_{k_m(n)}(a_m)$ tenda ad un valore $b_m \in [0,1]$. Definiamo ora $f \colon [0,1] \to [0,1]$ ponendo $f(a_i) = b_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, e $f(x) = 0$ se $x \notin A$. Per costruzione, $\mathrm{supp}(f) \subseteq A$ è al più numerabile, dunque f appartiene a Y. Inoltre, la sottosuccessione $f_{k_n(n)}(x)$ (ottenuta per procedimento "diagonale") converge a $f(x)$ per ogni $x \in [0,1]$. Ciò conclude la dimostrazione che Y è compatto per successioni.

In alternativa si può ragionare come segue: Se f_n ed A sono come sopra, poniamo

$$Y' = \{f \in Y \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq A\} \ .$$

La mappa

$$h \colon Y' \to [0,1]^A \,, \qquad h(f) = f|_A$$

è chiaramente bigettiva, ed è facile dimostrare (per esempio esplicitando l'inversa ed usando la proprietà universale della topologia prodotto) che è in effetti un omeomorfismo.

Per concludere è perciò sufficiente mostrare che $[0,1]^A$ è compatto per successioni: in tal caso, infatti, anche Y' lo sarebbe, e poiché $f_n \in Y'$ per ogni n sarebbe possibile estrarre da f_n una sottosuccessione convergente ad una funzione di $Y' \subseteq Y$, come voluto. Tuttavia, essendo prodotto numerabile di spazi metrizzabili, $[0,1]^A$ è metrizzabile. Inoltre, essendo prodotto di compatti, è anche compatto. La tesi segue ora dal fatto che, per spazi metrizzabili, compattezza e compattezza per successioni sono equivalenti.