Compito di Algebra 1
10 giugno 2022

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con la matita. Ogni passaggio va motivato.

Esercizio 1. Sia G un gruppo di ordine 63, e sia N_7 un suo 7-Sylow.

1. Spiegare come mai N_7 è normale.
2. Consideriamo l'omomorfismo $\Gamma: G \to Aut(N_7)$ che manda ogni elemento $g \in G$ nel coniugio $C_g : N_7 \to N_7$ (ossia $C_g(x) = gxg^{-1}$ per ogni $x \in N_7$). Dimostrare che la cardinalità di $Ker\ \Gamma$ è un multiplo di 21.
3. Dimostrare che non ci sono sottogruppi di S_9 con 63 elementi.

SINTESI DELLA RISOLUZIONE

1) Si vede subito che $n_7 = 1$ per cui N_7 è normale. (teoremi di Sylow).

2) $|Ker\ \Gamma|$ divide 63 dunque

$$|Ker\ \Gamma| = \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \\ 21 \\ 63 \end{cases}$$

D'altra parte $|\operatorname{Im}\Gamma|$ divide $|\operatorname{Aut}(N_7)|=6$

Ma $|\operatorname{Im}\Gamma| = \dfrac{63}{|\operatorname{Ker}\Gamma|}$ per il I teo omomorfismo,

dunque le uniche possibilità sono $|\operatorname{Ker}\Gamma| = \begin{cases} 21 \\ 63 \end{cases}$.

3) Supponiamo per assurdo che esista

$$G < S_9 \quad \text{con} \quad |G| = 63$$

Come sappiamo G contiene il s. gruppo $\operatorname{Ker}\Gamma$. Vale che $N_7 < \operatorname{Ker}\Gamma$ dunque in $\operatorname{Ker}\Gamma$ c'è un elemento $x \in N_7$, di ordine 7.

Per Cauchy e per il punto 2) c'è anche $y \in \operatorname{Ker}\Gamma$, di ordine 3.

Inoltre per la definizione di $\operatorname{Ker}\Gamma$, x e y commutano fra loro.

Allora xy ha ordine 21.

Ma in S_9, per ragioni di struttura ciclica degli elementi, non esistono elementi di ordine 27. ASSURDO.

Esercizio 2. Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo di G. Il centralizzatore $C(H)$ di H in G è definito da:

$$C(H) = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \quad \forall h \in H\}$$

1. Dimostrare che $C(H)$ è un sottogruppo di G.
2. Indicare, per ogni sottogruppo di D_4, qual è il suo centralizzatore.
3. È vero o falso che se $H \lhd G$ allora $C(H) \lhd G$?

SINTESI DELLA RISOLUZIONE

1) standard

2) SUGGERIMENTO: attenti, ricordate che

$D_4 = (r, s)$ con $o(r) = 4$

$o(s) = 2$

e $srs = r^{-1}$

Il centro di D_4 è (r^2), dunque ogni centralizzatore che troverete dovrà contenerlo.

3) Sia $a \in C(H)$, $h \in H$, $g \in G$.

Allora abbiamo.

$$(g\alpha g^{-1})\, h\, (g\alpha g^{-1})^{-1}$$

Se risulta $= h$ significa che

$g\alpha g^{-1} \in C(H)$ e allora.

$C(H) \triangleleft G$.

Dunque abbiamo:

$$(g\alpha g^{-1})\, h\, (g\alpha g^{-1})^{-1} =$$

$$= g\alpha \underbrace{(g^{-1} h\, g)}_{\substack{\in H \text{ perché } H \text{ è normale.}}} \alpha^{-1} g^{-1} =$$

Dunque $\alpha(g^{-1}hg)\alpha^{-1} = g^{-1}hg$

perché $\alpha \in C(H)$.

Allora

$$= g(g^{-1} h g) g^{-1} = h.$$

Esercizio 3. Si consideri il campo di spezzamento K su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^5 - 7$.

1. Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$.
2. Descrivere il gruppo di Galois $Aut(K/\mathbb{Q})$ ed esibire dei generatori.
3. Trovare un elemento $\alpha \in K$ tale che $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

SINTESI DELLA RISOLUZIONE:

1) $[K : \mathbb{Q}] = 20$

Sia $\alpha = \sqrt[5]{7}$. Allora

$$\begin{tikzcd}
 & K = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta_5) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\zeta_5) \arrow[dr, dash, "4"'] & & \mathbb{Q}(\alpha) \arrow[dl, dash, "5"] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

...... argomento standard

2) $Gal(K/\mathbb{Q}(\alpha)) \cong \mathbb{Z}_4$

generato da φ t.c. $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi(\zeta_5) = \zeta_5^2$

$Gal(K, \mathbb{Q}(\zeta_5)) \cong \mathbb{Z}/_5$ è normale,

generato da ψ t.c. $\psi(\zeta_5) = \zeta_5$, $\psi(\alpha) = \alpha\zeta_5$

Dunque $Gal(K/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/_5 \rtimes \mathbb{Z}/_4$

con relazione di coniugio.

$$\varphi\psi\varphi^{-1} = \psi^2$$

3) Si mostra che l'orbita di

$\alpha + \zeta_5$ ha 20 elementi,

da cui $\mathbb{Q}(\alpha + \zeta_5) = K$.

Infatti $\varphi^i\psi^j(\alpha + \zeta_5) =$

$$= \varphi^i(\zeta_5^j\alpha + \zeta_5) = \varphi^i(\zeta_5)^j\varphi^i(\alpha) + \varphi^i(\zeta_5) = \zeta_5^{2^i j}\alpha + \zeta_5^{2^i}$$

e vogliamo mostrare che, al variare di

$i = 0,1,2,3$ e $j = 0,1,2,3,4$ si tratta

di 20 elementi distinti

Supponiamo che

$$\zeta_5^{2^i j} \alpha + \zeta_5^{2^i} = \zeta_5^{2^k l} \alpha + \zeta_5^{2^k}.$$

Allora

$$(*) \quad \left(\zeta_5^{2^i j} - \zeta_5^{2^k l}\right) \alpha = \zeta_5^{2^k} - \zeta_5^{2^i}$$

Se $\zeta_5^{2^i j} \neq \zeta_5^{2^k l}$ seguirebbe

$$\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_5) \text{ che è assurdo,}$$

poiché sappiamo $\mathbb{Q}(\zeta_5) \cap \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}$.

Dunque resta da controllare il caso $\zeta_5^{2^i j} = \zeta_5^{2^k l}$ che per $(*)$ implica anche.

$$\varphi_5^{2^k} = \varphi_5^{2^i}.$$

Allora
$$\begin{cases} 2^i j \equiv 2^k l \pmod 5 \\ 2^i \equiv 2^k \pmod 5 \end{cases}$$

Da questo sistema si ricava subito $i = k$ e $j = l$, dato che i e k variano fra 0 e 3 e che j e l variano fra 0 e 4.