Sn

giovedì 21 ottobre 2021 11:59

definizioni e proprietà

- Una permutazione dei numeri $\{1, 2, \dots, n\}$ è una funzione bigettiva $f: \{1, \dots, n\} \mapsto \{1, \dots, n\}$
- $S_n =: \{$insieme di tali permutazioni$\}$; $(S_n, \circ) \equiv$ gruppo simmetrico su n elt.
- $|S_n| = n!$
- $\sigma = (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k)$ prende il nome di k-ciclo dove k è la sua lunghezza
- $\sigma = (a, b)$ cioè i 2-cicli prendono il nome di trasposizioni
- $\forall n \geq 3$ S_3 non è abeliano
- I cicli sono disgiunti se non hanno elt. in comune esempio $(12)(34)$ OK $(123)(245)$ NO!
- i cicli disgiunti commutano cioè $\sigma\tau = \tau\sigma$ esempio $(13)(45) = (45)(13)$

  non è vero che commutano se i cicli non sono disgiunti esempio σ e τ nell'esempio di prima
- Una permutazione la posso sempre scrivere come prodotto di cicli disgiunti

  esempio $(1\ 3\ 2\ 4\ 6)(2\ 4\ 3\ 5\ 7)(3\ 1\ 7\ 5\ 4\ 2)$ non disgiunte

  $\shortparallel$

  $(1\ 4\ 6)(2\ 5)(3)(7)$ disgiunte !!

Azione in Sn

Sia $\sigma \in S_n$.

Sia X insieme con $|X| = n$

Sia $G = \langle\sigma\rangle$

$\Rightarrow$ definiamo l'azione $\varphi: G \longrightarrow S(X) \cong S_n$

$\sigma \longmapsto \sigma : i \longmapsto \sigma(i) \quad \sigma \in S_n$

$Orb(x) = \{\sigma(x) \mid \sigma \in \langle\sigma\rangle\} = \{\sigma^e(x) \mid e \in \mathbb{N}\} = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{m-1}(x)\}$

con $|orb(x)| = m_x = \min\{k > 0 \mid \sigma^k(x) = x\}$

Dunque l'azione di $G = \langle\sigma\rangle$ su X divide X in orbite e su ogni orbita σ agisce ciclicamente ovvero $\sigma(orb(x)) = orb(x)$

- Si dice ciclo di $\sigma \in S_n$ l'orbita di un elt $x \in \{1, \dots, n\}$ vista come insieme ordinato $(x, \sigma(x), \dots, \sigma^{m_x - 1}(x))$
- Un ciclo di lunghezza k ha k-scritture distinte in quanto posso scegliere in maniera arbitraria il primo elt.
- Data $\sigma \in S_n$ essa è determinata dalle immagini di $\{1, \dots, n\}$ dunque è determinata dai suoi cicli
- Una permutazione si dice ciclica se ha un unico ciclo (orbita) non banale

generatori di Sn

- S_n è generato dalle permutazioni cicliche
- Le trasposizioni generano S_n
- $\{(i, j) \mid i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j\}$ (ogni permutazione può essere vista come prodotto di trasposizioni)
- $\{(1, j) \mid j \in \{2, \dots, n\}\}$ infatti $\forall i < j$ ho che $(i, j) = (1, i)(1, j)(1\ i)$
- $\{(i, i+1) \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\}$ $\forall j$ ho che $(1\ j) = (j-1, j)(1, j-1)(j-1, j)$

  $\{(1, 2)\ (1, 2, \dots, n)\}$ infatti $\forall i$ ho che $(1, \dots, n)^{i-1}(12)(1, \dots, n)^{1-i} = (i, i+1)$

  Non è vero in generale che una trasp. $\forall$ e un n-ciclo generano S_n

Regolette per lavorare con S_n.

Composizione di permutazioni

S_{10} $\quad \theta = (1\ 3\ 6\ 2\ 4\ 7)(5\ 8\ 10)$

$\tau = (1\ 3)(2\ 9)$

- $\tau \circ \theta = (1\ 3)(2\ 9)(1\ 3\ 6\ 2\ 4\ 7)(5\ 8\ 10)$
  $= (5\ 8\ 10)(1)(3\ 6\ 9\ 2\ 4\ 7)$
- $\theta \circ \tau = (1\ 3\ 6\ 2\ 4\ 7)(5\ 8\ 10)(1\ 3)(2\ 9)$
  $= (2\ 9\ 4\ 7\ 1\ 6)(3)(5\ 8\ 10)$

$\Rightarrow \theta\tau \neq \tau\theta$

I cicli commutano se e solo se sono disgiunti idem per la $\circ$

calcolo di potenze e inversi

$\theta = (2\ 3\ 5\ 4)$ $\quad ord(\theta) = 4 \Rightarrow \theta^4 = id$. $\quad$ calcolo esplicito

$\Rightarrow \theta = 2\ 3\ 5\ 4$

$\theta^2 = (2\ 5)(3\ 4)$

$\theta^3 = (2\ 4\ 5\ 3)$

$\theta^4 = (2)(3)(4)(5) = id$

| calcolo esplicito:

$\theta^2 = (2\ 3\ 5\ 4)(2\ 3\ 5\ 4)$
$= (2\ 5)(3\ 4)$

$\theta^3 = (2\ 5)(3\ 4)(2\ 3\ 5\ 4)$
$(2\ 4\ 5\ 3)$

$\theta^4 = (2\ 4\ 5\ 3)(2\ 3\ 5\ 4)$
oppure
$(2\ 5)(3\ 4)(2\ 5)(3\ 4)$
$= (2)(3)(4)(5) = id$.

$\theta \cdot \underset{\theta^3}{\underset{\shortparallel}{\tau}} = \theta^4$

$\theta^3 = (2\ 4\ 5\ 3) = (4\ 5\ 3\ 2)$

Per il calcolo dell'inversa

- se ho $\theta = (a, b, c) \Rightarrow \theta^{-1} = (c, b, a)$
- se $ord(\theta) = n \Rightarrow \theta^n = id \Rightarrow \theta \cdot \theta^{n-1} = \underset{id}{\underset{\shortparallel}{\theta^n}} \Rightarrow \theta^{n-1} = \theta^{-1}$

- Quindi se $\theta = (a, b, c)$ $\quad ord(\theta) = 3 \Rightarrow \theta^3 = id$
  $\Rightarrow \theta^2 = \theta^{-1} = (a, c, b) = (c, b, a)$

Per la composizione di due cicli

$\theta = (a, b, c)$ $\quad \tau = (d, a, b)$

$\theta \circ \tau = (a, \theta(\tau(a)) = c)(b, d)$

a: scelgo un el. da cui partire

$\tau(a) = b$ $\quad \theta(b) = c$

$\tau(c) =$ non c'è

$\theta(c) = a$

chiudo il ciclo

parto con un altro el.t, b

Lunghezza del ciclo e ordine di una permutazione

è il n° di elementi di un ciclo

$\theta = (a, b, c, d)$ $\quad$ lunghezza $\theta = 4$
$\shortparallel$
ordine

trasposizione

è un ciclo di lunghezza 2: (a,b)

Ogni ciclo può essere espresso come composizione di trasposizioni (la scrittura non è unica)

$\theta = (a_1, —, a_n)$

$\theta = (a_1, a_n)(a_1, a_{n-1})(a_1, a_{n-2}), —, (a_1, a_2)$

$(1,2,3,4,5) = (1,2)(1,4)(1,3)(1,2)$

Ancora sugli ordini

$\theta = \theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_3$ con $ord(\theta_1) = n$, $ord(\theta_2) = K$, $ord(\theta_3) = J$

e $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sono disgiunte

$\Rightarrow ord\ \theta = m.c.m(n, K, J)$

es: $\underbrace{(1\ 2\ 3)}_{3}\ \underbrace{(4,5)}_{2}\ \underbrace{(6\ 7, 8, 9)}_{4} = \tau$

$ord\ \tau = mcm(3,2,4) = 12$

$\mapsto$ se i cicli non sono disgiunti non vale!

$\underbrace{(1,2,3)}_{3}\ \underbrace{(2,1)}_{2} = \underset{2}{\underset{\downarrow}{(1\ 3)}}\ \underset{1}{\underset{\downarrow}{(2)}} = \tau$

$ord\ \tau = 2 \neq 6$

segno

$Sgn: S_n \mapsto \{\pm 1\}$

$\sigma \longmapsto Sgn(\sigma) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq K} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$

- è omo di gruppi
- Se σ è una trasposizione $\Rightarrow sgn(\sigma) = -1$
- Se $\sigma = t_1 \dots t_m$ t_J trasposizioni $\Rightarrow sgn(\sigma) = \prod_{1 \leq i \leq m} sgn(t_J) = (-1)^m$
- σ si dice pari se $sgn(\sigma) = 1$, dispari se $sgn(\sigma) = -1$

es:

ciclo di lunghezza (ordine) pari come $\theta = (a, b, c, d)$ è dispari

perché $\theta = (a,d)(a,c)(a,b)$ cioè lo scrivo tramite un numero dispari di traspo.

ciclo di lunghezza dispari come $\tau = (a,b,c)$ è pari

perché $\tau = (a,c)(a,b)$ cioè lo scrivo tramite un numero pari di trasposizioni

- $S_n = \{\text{elt pari}\} \cup \{\text{elt. dispari}\}$

  $\quad \| \quad A_n \equiv$ gruppo altermo

- $|A_n| = \frac{n!}{2}$

Modo altermativo per vedere l'omo

$$\phi: S_n \to \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$$
$$\theta \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \theta \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } \theta \text{ è dispari} \end{cases}$$

ϕ è omo di gruppi

e • $\operatorname{Ker} \phi = A_n$ • $S_n / \operatorname{Ker}\phi \cong \operatorname{Im}\phi < \mathbb{Z}_2$

$\Rightarrow A_n \trianglelefteq S_n$.

Se $\theta = \underbrace{\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_3}_{e} \underbrace{\circ \dots \circ \theta_n}_{r}$

r cicli di lunghezza dispari
l cicli di lunghezza pari } Allora θ è pari $\Leftrightarrow$ l è pari

es $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{pari} \\ \text{1-ciclo pari}}}{(1\,2\,3)}$ e $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{pari} \\ 1}}{(1\,2\,3)} \cdot \underbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{dispari} \\ -1}}{(4\,5\,6\,7)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{dispari} \\ -1}}{(8\,9)}}_{1 \Rightarrow \text{pari}}$

$(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7)$
$1 \quad -1 \quad = -1 \Rightarrow$ dispari

Coniugio in S_n

- Due permutazioni in S_n sono coniugate $\Leftrightarrow$ hanno la stessa decomposizione in cicli disgiunti
- Il numero di classi di coniugio in S_n è uguale al numero di partizioni di n.
- Se $H \leq S_n$ allora $H \trianglelefteq S_n \Leftrightarrow$ contiene tutte le permutazioni di un certo tipo o nessuna

coniugio

$\theta = (1, 3, 5)(2, 4, 6, 8) \qquad \theta, \tau \in S_9$

$\tau \theta \tau^{-1} = C_\tau(\theta) =$ coniugio

$\tau \theta \tau^{-1} = (\tau(1), \tau(3), \tau(5))(\tau(2)\ \tau(4)\ \tau(6)\ \tau(8))$

$\tau \theta \tau^{-1}(\tau(j)) = \tau(\theta(j))$

es $\tau = (1\ 4\ 6)(2\ 7\ 9\ 3)$

$$\tau\theta\tau^{-1} = \begin{cases} \tau(1) = 4 \\ \tau(3) = 2 \\ \tau(5) = 5 \end{cases} \qquad \underline{\tau\theta\tau^{-1} = (4\ 2\ 5)(7\ 6\ 1\ 8)}$$

$$\begin{cases} \tau(2) = 7 \\ \tau(4) = 6 \\ \tau(6) = 1 \\ \tau(8) = 8 \end{cases}$$

$\tau \theta \tau^{-1} = (1\,4\,6)(2\,7\,9\,3)(1\,3\,5)(2\,4\,6\,8)(6\,4\,1)(3\,9\,7\,2) =$

$\underline{(2\ 5\ 4)(3)(1\ 8\ 7\ 6)}$

Conto di permutazioni di una certa forma

esempio 1

In S_{17} quanti sono gli elementi che hanno un 5-ciclo e 3 4-cicli?

$$(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)\ \overset{C}{(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)}\ \overset{B}{(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)}\ \overset{A}{(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)}$$

$$\left[\binom{17}{5}\frac{5!}{5}\binom{12}{4}\frac{4!}{4}\binom{8}{4}\frac{4!}{4}\binom{4}{4}\frac{4!}{4}\right]\frac{1}{3!}$$

A B C
A C B
B A C
B C A
C A B
C B B

CONTATO

In generale

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{in } S_n \text{ se } \theta \text{ ha } m_1 \text{ cicli di lunghezza } l_1 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\quad m_k \text{ cicli di lunghezza } l_k \\ \text{Gli elt con la stessa struttura ciclica di } \theta \text{ sono} \\ \dfrac{n!}{l_1^{m_1}\cdots l_k^{m_k}\cdot m_1!\,m_2!\cdots m_k!} \end{array}}$$

es 2

in S_6 quante sono le σ della forma $(\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$

$$\left[\binom{6}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\right]\frac{1}{4!} = \left[\frac{6!}{2\cdot\cancel{4!}}\cdot\frac{\cancel{4!}}{\cancel{3!}}\cdot\frac{\cancel{3!}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\right]\frac{1}{4!}$$

$$\frac{{}^{3}\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 15.$$

Uso la formula $\dfrac{6!}{2^1\cdot1^4 1!\,4!} = \dfrac{3\cancel{6}\cdot5}{\cancel{2}} = 15.$

es 3

S_{10} contare gli elt che hanno questa forma ciclica.

$(a,b,c,d)\,(e,f,g)\,(h,i,e)$

$$\left[\binom{10}{4}\frac{4!}{4}\binom{6}{3}\frac{3!}{3}\binom{3}{3}\frac{3!}{3}\right]\frac{1}{2}$$

$$=\left[\frac{10!}{\cancel{4!}\,\cancel{6!}}\,\frac{\cancel{4!}}{4}\cdot\frac{\cancel{6!}}{\cancel{3!}\,\cancel{3!}}\,\frac{\cancel{3!}}{3}\,\frac{\cancel{3!}}{\cancel{3!}}\,\frac{\cancel{3!}}{3}\right]\frac{1}{2} = \frac{10!}{4.3.3.2} = \frac{10!}{36.2} = 50.400$$

$= 25.8.7.6.$

Con la formula $\dfrac{10!}{4^1\cdot3^2\cdot1!\,2!} = \dfrac{10!}{36.2} =$

$$\frac{10\cdot\cancel{9}\,8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3}{\cancel{36}} = 10.8.7.6.5.3 = 50400$$

es 4

in S_{20} quante sono le permutazioni di questa forma

$(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\,(\cdot,\cdot)\,(\cdot,\cdot)\,(\cdot,\cdot)$

$$\left[\binom{20}{4}\frac{4!}{4}\cdot\binom{16}{2}\binom{14}{2}\binom{12}{2}\right]\frac{1}{3!}$$

$$\left[\frac{20!}{\cancel{4!}\,\cancel{16!}}\,\frac{\cancel{4!}}{4}\,\frac{\cancel{16!}}{2.\cancel{14!}}\,\frac{\cancel{14!}}{2.\cancel{12!}}\,\frac{\cancel{12!}}{2.10!}\right]\frac{1}{6}$$

$$= \frac{20!}{10!\,32.6} = \frac{\cancel{20}^{5}\cdot19\cdot18\cdot17\cdot\cancel{16}^{4}\cdot15\cdot14\cdot13\cdot\cancel{12}\cdot11}{\cancel{4}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{32}}$$

$= 3\,491888\,400$

es 5

Quanti sono gli elt di ordine 6 in S_{10}?

$6 \mid 10!$

$$\left.\begin{array}{l}(a,b,c,d,e,f)\\(a,b,c,d,e,f)(g,h)\\(a,b,c,d,e,f)(g,h)(i,j)\end{array}\right] \rightsquigarrow (a,b,c,d,e,f)\cdot(g,h)^i \text{ con } i=0,1,2.$$

$(a,b,c,d,e,f)(g,h,i)$

$$\left.\begin{array}{l}(a,b,c)\,(d,e)\\(a,b,c)\,(d,e)(f,g)\\(a,b,c)(d,e)\,(f,g)\,(h,i)\end{array}\right] (a,b,c)\cdot(d,e)^j \text{ con } j=1,2,3$$

$$\left.\begin{array}{l}(a,b,c)(d,e,f)\,(g,h)\\(a,b,c)\,(d,e,f)\,(g,h)\,(i,j)\end{array}\right] (a,b,c)^2\cdot(d,e)^j \quad j=1,2.$$

$$\binom{10}{6}\frac{6!}{6}=\frac{10!}{\cancel{6!}\,4!}\cdot\frac{\cancel{6!}}{6}=\boxed{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 5}$$

$+$

$$\binom{10}{6}\frac{6!}{6}\cdot\binom{4}{2}=\boxed{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 5\cdot 6}$$

$$\left[\binom{10}{6}\frac{6!}{6}\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}\right]\frac{1}{2!}=\boxed{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 3\cdot 5.}$$

$$\binom{10}{6}\frac{6!}{6}\cdot\binom{4}{3}\frac{3!}{3}=\boxed{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 5\cdot 4\cdot 2.}$$

$$\binom{10}{3}\frac{3!}{3}\binom{7}{2}\frac{2!}{2}=\frac{10!}{3!\,\cancel{7!}}\cdot\cancel{2}\,\frac{\cancel{7!}}{\cancel{2}\cdot 5!}=\boxed{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}$$

$$\left[\binom{10}{3}\frac{3!}{3}\binom{7}{2}\frac{2!}{2}\binom{5}{2}\frac{2!}{2}\right]\frac{1}{2!}=\boxed{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 5}$$

$$\left[\binom{10}{3}\frac{3!}{3}\binom{7}{2}\frac{2!}{2}\cdot\binom{5}{2}\frac{2!}{2}\binom{3}{2}\frac{2!}{2}\right]\frac{1}{3!}=$$

e così via...

Fatto utile !!!

se $ord(\theta) = n$ $\quad n$ è il più piccolo intero t.c. $\theta^n = id$.

Considero θ^m quale è il più piccolo intero K t.c. $(\theta^m)^K = id$?

$(\theta^m)^K = \theta^{mK} = id \iff ord(\theta) = n \mid mK \iff$

$\frac{n}{MCD(n,m)} \mid K \Rightarrow K = \frac{n}{MCD(n,m)} \cdot t$

es Sia θ un 15-ciclo $\theta \in S_{20}$

θ è coniugato a θ^3? NO perché

$\frac{15}{MCD(15,3)} = \frac{15}{3} = 5$ cioè θ^3 è un 3 (5-ciclo)

$\theta = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$

$\theta^3 = (1, 4, 7, 10, 13)(2, 5, 8, 11, 14)(3, 6, 9, 12, 15)$

θ è coniugato a θ^4? SI

$\frac{15}{MCD(15,4)} = \frac{15}{1} = 15$ $\quad \theta^4$ è un 15-ciclo.

$\theta \quad \theta^2 \quad \theta^3 \quad \theta^4$

$\theta = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$

$\theta^4 = (1, 5, 9, 13, 2, 6, 10, 14, 3, 7, 11, 15, 4, 8, 12)$

S_3

$S_3 = \{f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} : f \text{ è bigettiva}\}$

$S_3 = \{e, (1,2,3), (1,3,2), (1,2), (2,3), (1,3)\}$

S_4

$|S_4| = 4! = 24$

possibili ordini
1 (4-ciclo)
2 (2-ciclo)
3 (3-ciclo)
4 (2-ciclo)(2-ciclo)

1 $\binom{4}{4}\frac{4!}{4} = \frac{4!}{\cancel{4!}\,4}\cdot\cancel{4!} = 6$ elt.

$(1\,2\,3\,4) = \theta$ $\quad \tau = (1\,2\,4\,3) = \gamma^3$ $\quad \gamma = (1\,3\,4\,2)$ $\quad \beta = (1\,3\,2\,4)$ $\quad \alpha = (1\,4\,2\,3) = \beta^3$

$\varphi = (1\,4\,3\,2) = \theta^3$

2 $\binom{4}{2}\frac{2!}{2} = 6$

$(1\,2), (1\,3), (1\,4), (2\,3), (2,4), (3\,4)$

3 $\binom{4}{3}\frac{3!}{3} = \frac{4!}{\cancel{3!}\,3}\cdot\cancel{3!} = 4\cdot 2 = 8$

$(1\,2\,3), (1\,3\,2), (1\,3\,4), (1\,4\,3), (1\,2\,4), (1\,4\,2),$
$(2\,3\,4), (2\,4\,3)$

4) $\binom{4}{2}\frac{1}{2!} = \frac{4!}{2\cdot 2\cdot 2} = 3$

$\theta^2 = (1\,3)(4\,2)$ $\quad \beta^2 = (1\,2)(3\,4)$ $\quad \gamma^2 = (1\,4)(2\,3)$

+ l'identità $\{e\}$

S_5

$|S_5| = 5! = 120$

1 (5 cicli)
2 (4 cicli)
3 (3 cicli)
4 (2 cicli)
5 (2 cicli)(2 cicli)
6 (2 cicli)(3 cicli)

1 $\binom{5}{5}\frac{5!}{5} = \frac{5!}{\cancel{5!}}\frac{\cancel{5!}}{5} = \frac{5!}{5} = 4! = 24$

2 $\binom{5}{4}\frac{4!}{4} = \frac{5!}{\cancel{4!}}\cdot\frac{\cancel{4!}}{4} = 5\cdot 3\cdot 2 = 30$

3 $\binom{5}{3}\frac{3!}{3} = \frac{5!}{\cancel{3!}\,2!}\frac{\cancel{3!}}{3} = 5\cdot 4 = 20$

4 $\binom{5}{2}\frac{2!}{2} = \frac{5!}{2\cdot 3!} = 5\cdot 2 = 10$

5 $\left[\binom{5}{2}\binom{3}{2}\right]\frac{1}{2} = \frac{10\cdot 3}{2} = 15$

6 $\binom{5}{2}\frac{2!}{2}\binom{3}{3}\frac{3!}{3} = 10\cdot\frac{3!}{3} = \frac{60}{3} = 20$

Sottogruppi abeliani massimali di S_n

Un sgr G si dice transitivo se l'azione $\varphi: G \mapsto S_n$, $\sigma \mapsto \sigma$ è transitiva cioè $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ $\exists\, \sigma \in G$ t.c. $\sigma(i) = j$

$G \circlearrowright_{\varphi} \{1,\dots,n\}$

- G sgr. abeliano di S_n, Se G è transitivo $\Rightarrow |G| = n$
- Se $a_1,\dots,a_k$ sono interi positivi tali che $\sum_{i=1}^{k} a_i = 3m$ con $m \geq k$ intero $\Rightarrow \prod_{i=1}^{k} a_i \leq 3^m$

  vale $=$ $\Leftrightarrow$ $k = m$ e $a_i = 3$ $\forall i \in \{1,\dots,k\}$