ERRORI

domenica 4 dicembre 2022 19:19

Teorema di Rappresentazione in base

Per ogni numero reale $x \neq 0$ $\exists!$ $p \in \mathbb{Z}$ e una successione $\{d_i\}_{i \geq 1}$ con le seguenti proprieta':

1 $0 \leq d_i \leq B-1$
2 $d_1 \neq 0$
3 $\forall K > 0$ $\exists j \geq K$ t.c. $d_j \neq B-1$

$\Rightarrow x = sgn(x) B^p \sum_{i=1}^{\infty} d_i B^{-i}$

- B ≐ base della rappresentazione
- d_j ≐ cifre
- P ≐ esponente
- $\sum_{i=1}^{\infty} d_i B^{-i}$ ≐ mantissa

La 2 si chiama normalizzazione e serve a memorizzare in maniera più efficiente un numero reale (0,003 = 0,3 ma risparmio cifre)
inoltre garantisce l'unicità della rappresentazione (0,03 = 0,3)
Ricorda il primo numero dopo la virgola $\neq 0$.

La 3 mi dice che non posso avere periodicità (0,3718444)

Numeri di macchina

$B \geq 2$, $t \geq 1$ $m, M > 0$ $\mathcal{F}(t, B, m, M) = \{0\} \cup \{\pm B^p \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-i} \mid d_1 \neq 0 \wedge 0 \leq d_i \leq B-1 \wedge -m \leq p \leq M\}$

- sia $x = sgn(x) B^p \sum_{i=1}^{\infty} d_i B^{-i}$
- sia $\tilde{x} = sgn(x) B^p \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-i}$

Se $-m \leq p \leq M$ il numero x viene ben rappresentato in $\mathcal{F}$ da $\tilde{x}$ e si ha $\boxed{\varepsilon_x = \frac{\tilde{x} - x}{x} = \text{errore relativo di rappresentazione}}$

dove $\left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| < B^{1-t}$ ≐ precisione di macchina $= u$

- Se $p < -m \Rightarrow$ underflow
- se $p > M \Rightarrow$ overflow

$\Rightarrow$ x non è rappresentabile in $\mathcal{F}$

Il tipo di approssimazione di x con $\tilde{x}$ l'ho ottenuto tramite troncamento

Aritmetica di macchina

$\hat{c} = a[op]b$ $\quad a[op]b = tronc(a \text{ op } b)$ $\quad op \in \{+, -, \times, \div\}$

$\hat{c} = c(1+\delta) = c(1+\eta)$ dove $\boxed{\delta = \frac{\hat{c} - c}{c} \text{ e } \eta = \frac{\hat{c} - c}{\hat{c}}}$ e $|\delta| < u$ e $|\eta| < u$

δ e η si chiamano errori locali commessi nel mantenere il risultato delle operazioni dentro $\mathcal{F}$

Errori nel calcolo di una funzione

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ devo calcolare $f(\tilde{x})$ dove $x \in \Omega$ e $\tilde{x} \in \mathcal{F} \cap \Omega$

produco $\boxed{\varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \text{errore inerente}}$

analisi dell'errore inerente

- Se $n=1$ cioè $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, assumendo che $f(x)$ sia definita e derivabile almeno due volte con continuità nel segmento di estremi x e $\tilde{x}$. Uno sviluppo in serie fornisce $f(\tilde{x}) = f(x) + (\tilde{x}-x) f'(x) + \frac{1}{2} (\tilde{x}-x) f''(\xi)$ con $|\xi - x| < |\xi - \tilde{x}|$

considerando $\boxed{\delta x = \frac{\tilde{x}-x}{x}}$ = errore di rappresentazione si ricava che $\boxed{\varepsilon_{in} \doteq \delta x \underbrace{\frac{x f'(x)}{f(x)}}_{\text{coefficente di amplificazione}}}$

e mi dice quanto δx viene amplificato nel valore di $f(x)$

- se $n>1$ cioè $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si ha che $\delta x_i = \frac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i}$ per $i = 1, \dots, n$

$\boxed{\varepsilon_{in} = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \, C_i}$ dove $C_i = \dfrac{x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{f(x)}$ = coeff. di amplificazione rispetto a x_i

- Un problema è **ben-condizionato** se una piccola variazione relativa dei valori di input produce una piccola variazione relativa dei valori di output

- Un problema è **mal-condizionato** se una piccola variazione relativa dei valori di input produce una grande variazione relativa dei valori di output

funzioni razionali

Sono quelle che si possono calcolare con un numero finito di op. aritmetiche

Produco $\boxed{\varepsilon_{alg} = \frac{\varphi(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}}$ = **errore algoritmico** generato dall'accumularsi degli errori locali relativi a ciascuna operazione aritmetica

analisi dell'errore algoritmico

$s = x_1 \text{ op } x_2 \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{s} = (\tilde{x}_1 \text{ op } \tilde{x}_2)(1+\delta)$ dove $|\delta| < u$

↳ errore locale

$\tilde{x}_1 = x_1(1+\varepsilon_{x_1})$ e $\tilde{x}_2 = x_2(1+\varepsilon_{x_2})$ con $\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}$ **errori di rappresent.** di x_1 e x_2 se dati in input

v **errori accumulati nelle operazioni precedenti**

$\tilde{s} = (x_1 \text{ op } x_2)(1 + \delta + C_1 \varepsilon_{x_1} + C_2 \varepsilon_{x_2})$ $\quad C_1, C_2$ coeff. di amplificazione

Coeff. di amplificazioni di $\{+, -, \times, \div\}$

moltiplicazione $\mapsto$ $C_1 = 1$, $C_2 = 1$

divisione $\longmapsto$ $C_1 = 1$, $C_2 = -1$

somma $\longmapsto$ $C_1 = \frac{x_1}{x_1+x_2}$, $C_2 = \frac{x_2}{x_1+x_2}$

sottrazione $\longmapsto$ $C_1 = \frac{x_1}{x_1-x_2}$, $C_2 = -\frac{x_2}{x_1-x_2}$

Evitare di addizionare numeri di segno opposto
Evitare di sottrarre numeri dello stesso segno

errore totale

$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg} + \varepsilon_{in}\varepsilon_{alg} \doteq \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg} = \dfrac{\varphi(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$

funzioni non razionali

Non posso definire un errore algoritmico perché $g(x)$ non può essere calcolata in un numero finito di operazioni aritmetiche

Per poter calcolare $g(x)$ dobbiamo selezionare una f. razionale $f(x)$ che ben approssimi $g(x)$.

$\boxed{\varepsilon_{in} = \frac{f(x) - g(x)}{g(x)}}$ = errore analitico che esprime di quanto si discosta f da g

esempio

Taylor con resto di Lagrange

errore totale

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg} + \varepsilon_{an}(\tilde{x}) + \varepsilon_{in}\varepsilon_{alg} + \varepsilon_{alg}\varepsilon_{an}(\tilde{x}) + \varepsilon_{in}\varepsilon_{alg}\varepsilon_{an}(\tilde{x}) \doteq \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg} + \varepsilon_{an}(\tilde{x})$$

$$= \frac{\varphi(\tilde{x}) - g(x)}{g(x)}$$

Schema errori

errore relativo di rappresentazione $= \varepsilon_x = \frac{\tilde{x} - x}{x}$

errore inerente $= \varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$

$$\varepsilon_{in} = \delta_x \frac{x f'(x)}{f(x)}$$ = coeff. di amplificazione

= errore relativo di rappresentazione $\frac{\tilde{x}-x}{x}$

errore algoritmico $= \varepsilon_{alg} = \frac{\varphi(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$

errore analitico $= \varepsilon_{an} = \frac{f(x) - g(x)}{g(x)}$

errore totale $= \varepsilon_{tot} \doteq \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg} = \frac{\varphi(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$

$$\varepsilon_{tot} \doteq \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg} + \varepsilon_{an} = \frac{\varphi(\tilde{x}) - g(x)}{g(x)}$$

analisi in avanti

obiettivo = dare maggiorazioni al valore assoluto dell'errore alg. alla fine dei calcoli

analisi all'indietro

obiettivo = dare maggiorazioni al valore assoluto delle perturbazioni δ_i

ε_{alg} viene visto come un errore inerente cioè causato da una perturbazione dell'input