FATTORIZZAZIONE LU E QR

mercoledì 21 dicembre 2022 12:01

Tipi di fattorizzazioni

- $A = LU$ L = tri. inf con elt diag = 1 U = tri. sup.
- $A = PLU$ P. mat. di Permutazione L = tri. inf con elt diag = 1 U = tri. sup.
- $A = P_1 L U P_2$ P_1, P_2 mat. di Permutazione L = tri. inf con elt diag = 1 U = tri. sup.
- $A = QR$ Q unitaria e R tri. sup.

Teorema

Se tutte le sottomatrici principali di testa $k \times k$ di A sono non singolari per $k = 1, \dots, n-1 \Rightarrow$

$\exists!$ la fatt. $A = LU$

idea dim

Per induz. su n

P.B $n = 1$ $L = (1)$ $A = U = (a_{1,1})$

$$P I \quad \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & b \\ \hline c^T & a_{n,n} \end{array}\right] = \overbrace{\left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right]}^{\text{riga}} \overbrace{\left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0 & u_{n,n} \end{array}\right]}^{\text{colonna}}$$

$$A_{n-1} = \overbrace{L_{n-1}}^{\text{riga}} \cdot \overbrace{U_{n-1}}^{\text{colonna}} \qquad c^T = x^T U_{n-1}$$

$$b = L_{n-1}\, y \qquad a_{nn} = x^T y + u_{n,n}$$

e applichiamo Ip. ind.

Osservazione

$A = QR$ non è unica contr. D mat D diag
- D è triangolare sup.
- D è unit.

$$A = \underbrace{Q D}_{\hat{Q}} \underbrace{D^{-1} R}_{\hat{R}} = \underset{\text{unita}}{\hat{Q}}\ \underset{\text{tri sup.}}{\hat{R}}$$

Matrici elementari

- Matrici elt di Gauss sono triangolari inferiori ⟶ LU
- Matrici elt di Housholder sono unitarie e hermitiane ⟶ QR

Servono a dare una fatt. $A = SU$ dove S è prodotto di mat. elt e U è triang. sup.

Definizione

$$M = I - \underset{\in \mathbb{C}}{\sigma}\, \underbrace{\overbrace{u\, v^H}^{\text{matrice}}}_{\in \mathbb{C}^n} \quad \text{è una mat. elt}$$

Osservazioni

$x \in \mathbb{C}^n \quad Mx = x - \underbrace{\sigma u (\overbrace{v^H x}^{\text{numero}})}_{\text{v. colonna}}$

Se $x \in$ sp. ortog. a v cioè $\langle v^H x \rangle = 0 \Rightarrow Mx = x$

Se $x = u \Rightarrow Mu = u - \sigma u (v^H u) = \underbrace{(1 - \sigma v^H u)}_{\text{è autovalore}} u$

$\boxed{\Rightarrow}$ se è 0 cioè $\sigma v^H u = 1 \Rightarrow M$ è singolare

$\boxed{\Leftarrow}$ Se M è singolare $\exists\, x \neq 0$ t.c. $Mx = 0 \Rightarrow x = \sigma \underbrace{(v^H x)}_{\neq 0} u = x$ e cioè $x = u$ e $\sigma v^H u = 1$

Inversa

Cercare l'inversa nelle stesse classi di mat elt.

Teorema

$M = I - \sigma u v^H$ è non singolare $\Leftrightarrow \sigma v^H u \neq 1$

La sua inversa è $M^{-1} = I - \tau u v^H$ dove $\tau = \dfrac{-\sigma}{1 - \sigma \underbrace{v^H u}_{\text{numero}}}$ = numero

$$\begin{cases} y = Mb \quad \text{costa } (2\underset{\cdot}{n}+1) + (2\underset{+}{n}-1) \\ Mx = b \quad \text{costa } (3\underset{\cdot}{n}+2) + (3\underset{+}{n}-1) + \underset{\div}{1} \end{cases}$$

Teorema 3

$\forall\, x, y \in \mathbb{C}^n\ \exists\, M$ elt $M = I - \sigma u v^H$ non singolare t.c. $Mx = y$

Idea dim

Si procede in modo costruttivo

1 $Mx = \underbrace{(I - \sigma u v^H) x = y}_{\Downarrow}$

2 $\sigma u (v^H x) = x - y$

3 Scelgo v non ortog a x

4 pongo $\sigma u = \dfrac{x - y}{v^H x}$

5 per la non singolarità uso la cond. $\sigma v^H u \neq 1 \Rightarrow \dfrac{v^H (x-y)}{v^H x} \neq 1 \Rightarrow v^H y \neq 0$ cioè v non ort. a y.

Matrici elt di Gauss

$M = I - \sigma u v^H$ si pone $\boxed{\begin{array}{l} v = e^1 \\ \sigma = 1 \\ u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \quad u_1 = 0 \end{array}}$

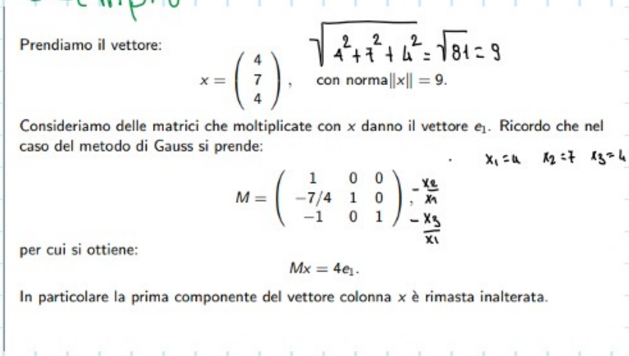
- $M = I - 1 \cdot u (e^1)^H = I - u v^H = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -u_2 & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ -u_n & & & 1 \end{bmatrix}$

- $M^{-1} = I + u v^H = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ u_2 & 1 & & \\ | & & \ddots & \\ u_n & 0 & & 1 \end{bmatrix}$

- Se $\underset{\neq 0}{x} = (x_1, -, x_n)^T \Rightarrow \exists$ Mett. di Gauss t.c. $Mx = x_1 e^1$ infatti basta porre $u_i = \frac{x_i}{x_1}$

- $$M = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1} & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ -\frac{x_n}{x_1} & & & 1 \end{pmatrix} \quad \overbrace{1 + \max\left|\left(\frac{x_i}{x_1}\right)\right|}^{\|M\|_\infty} \Rightarrow \mu(M) = \|M\|\,\|M^{-1}\| = \left[1 + \max\left|\frac{x_i}{x_1}\right|\right]^2 = 4 \iff x_1 = \max(x_i)$$

esempio



Prendiamo il vettore:

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{con norma} \|x\| = 9. \qquad \sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9$$

Consideriamo delle matrici che moltiplicate con x danno il vettore e_1. Ricordo che nel caso del metodo di Gauss si prende:

$x_1 = 4 \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 4$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7/4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -\frac{x_2}{x_1} \quad -\frac{x_3}{x_1}$$

per cui si ottiene:

$$Mx = 4e_1.$$

In particolare la prima componente del vettore colonna x è rimasta inalterata.

Matrici elt di Householder

- M è unitaria e hermitiana
- $M = I - \beta u u^H \quad \beta = 0 \vee \beta = \frac{2}{u^H u}$ e $u \neq 0$
- l'inversa e' se stessa

Posso costruire M t.c. $Mx = \alpha e^1$

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ lascia la } \|\cdot\|_2 \text{ invariata} \\ M \text{ hermitiana} \end{array}\right] \Rightarrow \underbrace{c = x^H \overbrace{Mx}^{\text{colonna}}}_{\text{numero}} = x^H M^H x = (x^H M x)^H = c^H = \bar{c}$$

$$\Rightarrow c \in \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{x^H \underbrace{Mx}_{\alpha e^1}}_{\overline{x_1}\alpha} \text{ è reale}$$

Ricaviamo tutto

① $\alpha = \theta \|x\|_2$ con $|\theta| = 1$ perchè $|\alpha| = \|x\|_2$

② $$\theta = \begin{cases} \pm \frac{x_1}{|x_1|} & \text{se } x_1 \neq 0 \quad 1+2 \Rightarrow \quad \overline{x_1}\alpha = \pm |x_1| \cdot \|x\|_2 \in \mathbb{R} \\ \pm 1 & \text{se } x_1 = 0 \quad 1+2 \Rightarrow \quad \overline{x_1}\alpha = 0 \end{cases}$$

③ $Mx = \alpha e^1$

$$(I - \beta u u^H) x = \alpha e^1 \Rightarrow \beta \overbrace{(u^H u)}^{\text{num.}} x = x - \alpha e^1$$

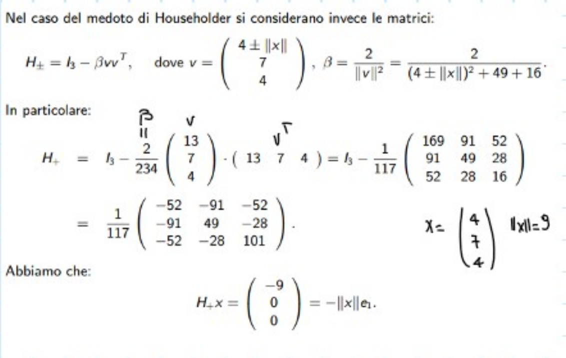
pongo $u = x - \alpha e^1$ + $\beta = \frac{2}{u^H u}$

$$\downarrow$$

$$u_1 = x_1 - \alpha = x_1 \left(1 \mp \frac{\|x\|_2}{|x_1|}\right) = \begin{cases} x_1 \left(1 + \frac{1}{|x_1|} \|x\|_2 & \text{se } x_1 \neq 0 \\ \|x\|_2 & \text{se } x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\beta = \frac{1}{(\|x\|_2^2 + |x_1| \|x\|_2)}$$

Continua esempio



Nel caso del medoto di Householder si considerano invece le matrici:

$$H_\pm = I_3 - \beta v v^T, \quad \text{dove } v = \begin{pmatrix} 4 \pm \|x\| \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \beta = \frac{2}{\|v\|^2} = \frac{2}{(4 \pm \|x\|)^2 + 49 + 16}.$$

In particolare:

$$H_+ = I_3 - \overset{\beta}{\overset{\|}{\frac{2}{234}}} \overset{v}{\begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}} \cdot \overset{v^T}{\begin{pmatrix} 13 & 7 & 4 \end{pmatrix}} = I_3 - \frac{1}{117} \begin{pmatrix} 169 & 91 & 52 \\ 91 & 49 & 28 \\ 52 & 28 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{117} \begin{pmatrix} -52 & -91 & -52 \\ -91 & 49 & -28 \\ -52 & -28 & 101 \end{pmatrix}.$$

$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\|x\| = 9$

Abbiamo che:

$$H_+ x = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\|x\| e_1.$$

Fattorizzazione mediante matrici elt.

Obiettivo $A = \underset{\overset{\|}{M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}}}{S} \underbrace{U}_{\text{Triang. sup.}}$ per poter risolvere $\begin{cases} \overset{\xrightarrow{n^2 \text{ op.}}}{Sy = b} \\ Ux = y \end{cases} = Ax = b$ $O(n^2)$

$\hookrightarrow \underset{+}{3n^2} + \underset{\cdot}{3n^2}$

① $A_1 = A \longmapsto \{A_K\}$ dove $A_{K+1} = \underset{\text{elt}}{\underset{\downarrow}{M_K}} \underset{\text{con le prime } K-1 \text{ colonne in f. triang}}{\underset{\downarrow}{A_K}}$

$\boxed{1A}$

$$A_K = \begin{array}{c|c|c|c} & K-1 & n-K+1 & \\ \hline K-1 & T_K & V_K & K-1 \\ \hline & 0 & W_K & n-K+1 \\ & & n-K+1 & \end{array}$$

T_K triang. sup.

$A_2 \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & \\ & \end{bmatrix}$

② Per Teo 3 $\exists M_1 \underset{\text{1 colonna di } A \ A^1}{\underset{\|}{a^{(1)}}} = \boxed{a_{11}^{(2)}} e^{(1)}$ mi da la A_2^1

$\boxed{2A}$ $A_2 = M_1 A_1 = \begin{array}{c|c|c} & n-1 & \\ a_{11}^{(2)} & V_2 & 1 \\ \hline 0 & & \\ | & W_2 & n-1 \\ 0 & & \\ & n-1 & \end{array}$

processo di triangolarizzazione applicato ad $A = A_1$

③ Processo di triang applicato a W_2

- $\hat{M}_2 W_2^1 = \alpha \underset{\underset{\mathbb{C}^{n-1}}{\cap}}{e^1}$
- In generale $\hat{M}_K W_K = \left[\begin{array}{c|c} a_{KK}^{(K+1)} & z^T \\ \hline 0 & \\ | & W_{K+1} \\ 0 & \end{array}\right]$

④ collegamento tra M_K e $\hat{M}_K$

$$M_K = \begin{bmatrix} I_{K-1} & 0 \\ 0 & \hat{M}_K \end{bmatrix}$$

⑤ $M_K A_K = \left[\begin{array}{c|c} T_K & V_K \\ \hline 0 & \hat{M}_K W_K \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} T_K & \multicolumn{2}{c}{V_K} \\ \hline 0 & a_{KK}^{K+1} & z^T \\ \cline{2-3} & 0 & W_{K+1} \end{array}\right] = A_{K+1} = \left[\begin{array}{c|c} T_{K+1} & V_{K+1} \\ \hline 0 & W_{K+1} \end{array}\right]$

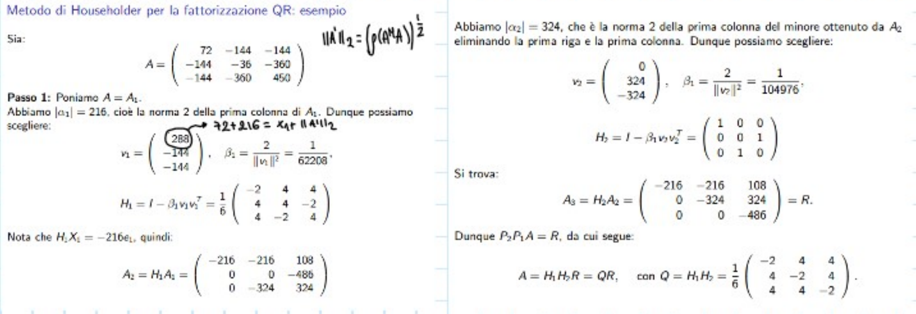
⑥ Conclusione

$\underset{\text{T. sup.}}{\underset{\downarrow}{A_n}} = M_{n-1} \dots M_1 \underset{\overset{\|}{M_1^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} A_n}}{A}$

Osservazioni

M_K sono di Householder $\Rightarrow \widehat{M}_K$ è di Householder $\Rightarrow QR \Rightarrow QR \ \exists$ sempre

M_K Gauss $\Rightarrow \widehat{M}_K$ Gauss $\Rightarrow LU \Rightarrow \exists \Leftrightarrow \underbrace{a_{K,K}^{(K)}}_{\text{pivot}} \neq 0$



Metodo di Householder per la fattorizzazione QR: esempio

Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 72 & -144 & -144 \\ -144 & -36 & -360 \\ -144 & -360 & 450 \end{pmatrix}$$

$\|A'\|_2 = \left(\rho(A^H A)\right)^{\frac{1}{2}}$

Passo 1: Poniamo $A = A_1$.
Abbiamo $|\alpha_1| = 216$, cioè la norma 2 della prima colonna di A_1. Dunque possiamo scegliere:

$\xrightarrow{} 72 + 216 = x_1 + \|A'\|_2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \boxed{288} \\ -144 \\ -144 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \frac{2}{\|v_1\|^2} = \frac{1}{62208},$$

$$H_1 = I - \beta_1 v_1 v_1^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Nota che $H_1 X_1 = -216 e_1$, quindi:

$$A_2 = H_1 A_1 = \begin{pmatrix} -216 & -216 & 108 \\ 0 & 0 & -486 \\ 0 & -324 & 324 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $|\alpha_2| = 324$, che è la norma 2 della prima colonna del minore ottenuto da A_2 eliminando la prima riga e la prima colonna. Dunque possiamo scegliere:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 324 \\ -324 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \frac{2}{\|v_2\|^2} = \frac{1}{104976},$$

$$H_2 = I - \beta_1 v_2 v_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si trova:

$$A_3 = H_2 A_2 = \begin{pmatrix} -216 & -216 & 108 \\ 0 & -324 & 324 \\ 0 & 0 & -486 \end{pmatrix} = R.$$

Dunque $P_2 P_1 A = R$, da cui segue:

$$A = H_1 H_2 R = QR, \quad \text{con } Q = H_1 H_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Complemento di Schur

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right]$$ Dove $A_{1,1}$ è $K \times K$ non singolare

- $S = A_{2,2} - A_{2,1} A_{1,1}^{-1} A_{1,2}$

  $\shortparallel$

  complemento di Schur di $A_{2,2}$ in A

- $A = LU = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{2,1} A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & S \end{bmatrix}$
- S coincide con W_K
- $\det(A) = \det(A_{1,1}) \det(S)$

ASPETTI COMPUTAZIONALI

Metodo di eliminazione Gaussiana

$\{A_K\}$ t.c. $A_{K+1} = M_K A_K$ dove $M_K = (m_{i,j}^{(K)}) = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ -\frac{a_{i,K}}{a_{K,K}} & \text{per } j = K, i > K \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$a_{i,j}^{(K+1)} = \begin{cases} a_{i,j}^{(K)} & \text{se } j < K \ \vee \ i \leq K \\ 0 & \text{se } j = K \\ a_{i,j}^{(K)} + m_{i,K}^{(K)} a_{K,j}^{(K)} & \text{se } i > K, \ j > K \end{cases}$$

Algoritmo

```
for K = 1, ..., n-1                                          ] (n-K)
    for i = K+1, ..., n                                      ] 2(n-K)^2
        m_{i,K} = -a_{i,K} / a_{K,K}      ] n-K divisioni
        for j = K+1, ..., n
            a_{i,j} = a_{i,j} + m_{i,K} . a_{K,j}      ] 2(n-K)
        end j
    end i
end K
```

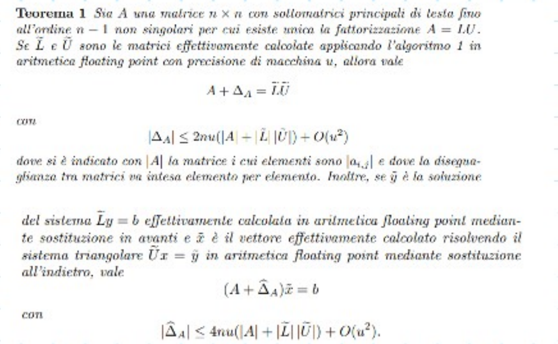
Oss

- Se devo ris. $Ax=b$ add $b_i = b_i + m_{i,K} b_K$ here ●
- $L = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}$ $\quad l_{i,K} = -m_{i,K} = \frac{a_{i,K}}{a_{K,K}}$
- $M_K \neq I$ solo perchè nella K-colonna dove gli elt di indice $> K$ sono $\frac{a_{i,K}}{a_{K,K}}$

Costo computazionale

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(2(n-k)^2 + (m-k)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2 + k)$$

Uso : $\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i \Rightarrow C_n \doteq \frac{2}{3} n^3$



Teorema 1 *Sia A una matrice $n \times n$ con sottomatrici principali di testa fino all'ordine $n-1$ non singolari per cui esiste unica la fattorizzazione $A = LU$. Se $\tilde{L}$ e $\tilde{U}$ sono le matrici effettivamente calcolate applicando l'algoritmo 1 in aritmetica floating point con precisione di macchina u, allora vale*

$$A + \Delta_A = \tilde{L}\tilde{U}$$

con

$$|\Delta_A| \leq 2nu(|A| + |\tilde{L}|\,|\tilde{U}|) + O(u^2)$$

dove si è indicato con $|A|$ la matrice i cui elementi sono $|a_{i,j}|$ e dove la disuguaglianza tra matrici va intesa elemento per elemento. Inoltre, se $\tilde{y}$ è la soluzione

del sistema $\tilde{L}y = b$ effettivamente calcolata in aritmetica floating point mediante sostituzione in avanti e $\tilde{x}$ è il vettore effettivamente calcolato risolvendo il sistema triangolare $\tilde{U}x = \tilde{y}$ in aritmetica floating point mediante sostituzione all'indietro, vale

$$(A + \widehat{\Delta}_A)\tilde{x} = b$$

con

$$|\widehat{\Delta}_A| \leq 4nu(|A| + |\tilde{L}|\,|\tilde{U}|) + O(u^2).$$

Strategia del massimo pivot parziale

$m_{i,k} = -\frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$ ⚠ problema se $|a_{k,k}| << |a_{i,k}|$ perché $m_{i,k}$ è grande

Come si risolve? Facendo una permut. di righe ad A_k prima di triangolarizzarla cioè

① scelgo R t.c. $|a_{R,k}| \geq |a_{i,k}| \; \forall i \geq k$.

② Scambio $R_R \leftrightarrow R_K$ $\Rightarrow$ Ottengo mat. triangolare a blocchi dove l'elt pivot ha modulo ≥ a quello degli elt sulla stessa colonna sotto Δ

es $\begin{array}{cc} R_1 & 1 \\ R_2 & 4 \\ R_3 & 9 \\ R_4 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 9 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{array} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{array}{c} 9 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{array}$

③ $A_{K+1} = M_K P_K A_K$

④ Vale $P_K M_i = \tilde{M}_i P_K$

$$\tilde{M}_i = I - \tilde{v}^{(i)} e^{(i)T}, \quad \tilde{v}^{(i)} = P_K v^{(i)}$$

se ho una permutazione

(4+3) $A_{K+1} = M_K P_K A_K = M_K P_K M_{K-1} \dots M_1 A = M_K \tilde{M}_{K-1} \dots \tilde{M}_1 P_K A$

Itero

$A_{K+1} = M_K \tilde{M}_{K-1} \dots \tilde{M}_1 P_K P_{K-1} \dots P_1 A$

⑤ $PA = LU$ $\quad P = P_{n-1} \dots P_1$ $\quad \Rightarrow A = P^T LU$

Vantaggi

Ha il vantaggio di contenere la crescita di $|m_{i,k}|$ che ora è ≤ 1

Se ho un pivot nullo $a_{k,k}$ porto a termine il processo passando alla K+1 colonna

Migliora le prestazioni numeriche

Svantaggi

Non dà garanzie assolute di stabilità perché U non è u. limitato

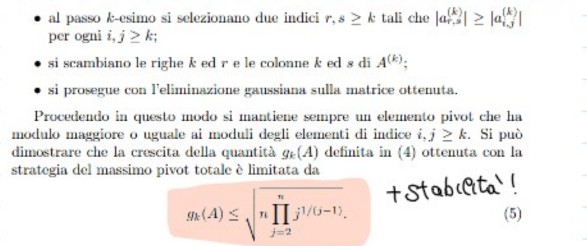
cioè $|a_{i,j}^{K+1}| \le |a_{i,j}^{K}| + \underset{\textcircled{\le 1}}{|m_{i,j}^{K}|}\,|a_{K,j}^{K}| \le |a_{i,j}^{(K)}| + |a_{K,j}^{(k)}|$

Chiamo $g_K(A) = \dfrac{\max|a_{i,j}^{(K)}|}{\max|a_{i,j}|}$

$g_{K+1}(A) \le \underbrace{2\, g_K(A)}$

$g_n(A) \le 2^{n-1}$

Massimo pivot totale



- al passo k-esimo si selezionano due indici $r, s \ge k$ tali che $|a_{r,s}^{(k)}| \ge |a_{i,j}^{(k)}|$ per ogni $i, j \ge k$;
- si scambiano le righe k ed r e le colonne k ed s di $A^{(k)}$;
- si prosegue con l'eliminazione gaussiana sulla matrice ottenuta.

Procedendo in questo modo si mantiene sempre un elemento pivot che ha modulo maggiore o uguale ai moduli degli elementi di indice $i, j \ge k$. Si può dimostrare che la crescita della quantità $g_k(A)$ definita in (4) ottenuta con la strategia del massimo pivot totale è limitata da

$$g_k(A) \le \sqrt{n \prod_{j=2}^{n} j^{1/(j-1)}}. \qquad (5)$$

+stabilità!

Calcolo dell'inversa e del det

$PA = LU \Rightarrow \det(A) = \pm \det U$ costa $\frac{2}{3}n^3$

$\pm$ ↓ dipende dalla parità di P cioè n° di scambi di righe

$LUx = e^{(K)}$

$$\begin{cases} Ly = e^{(k)} & (n-K+1)^2 \text{ op} \\ Ux = y & n^2 \text{ op.} \end{cases}$$

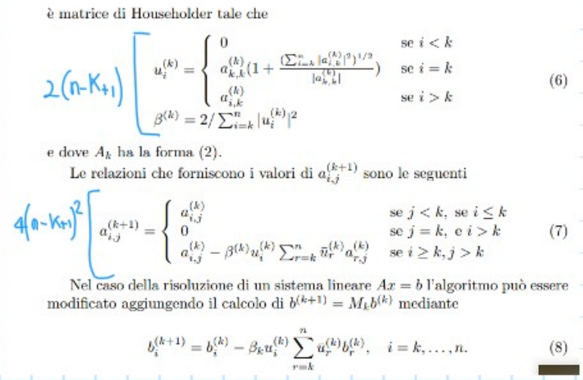
perché è sistema Triang inf.

Tot $\underbrace{\dfrac{n^3}{3+n^3}}_{\text{sommando in K}} + \underbrace{\frac{2}{3}n^3}_{\text{fatt LU}} = 2n^3$

ASPETTI COMPUTAZIONALI

Metodo di Householder

$A_{K+1} = M_K A_K$ dove M_K di Hous.



è matrice di Householder tale che

$$2(n-K_{+1}) \left[\begin{array}{l} u_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i < k \\ a_{k,k}^{(k)}\left(1 + \frac{(\sum_{i=k}^{n} |a_{i,k}^{(k)}|^2)^{1/2}}{|a_{k,k}^{(k)}|}\right) & \text{se } i = k \\ a_{i,k}^{(k)} & \text{se } i > k \end{cases} \\ \beta^{(k)} = 2/\sum_{i=k}^{n} |u_i^{(k)}|^2 \end{array} \right. \qquad (6)$$

Totale $\frac{4}{3}n^3$

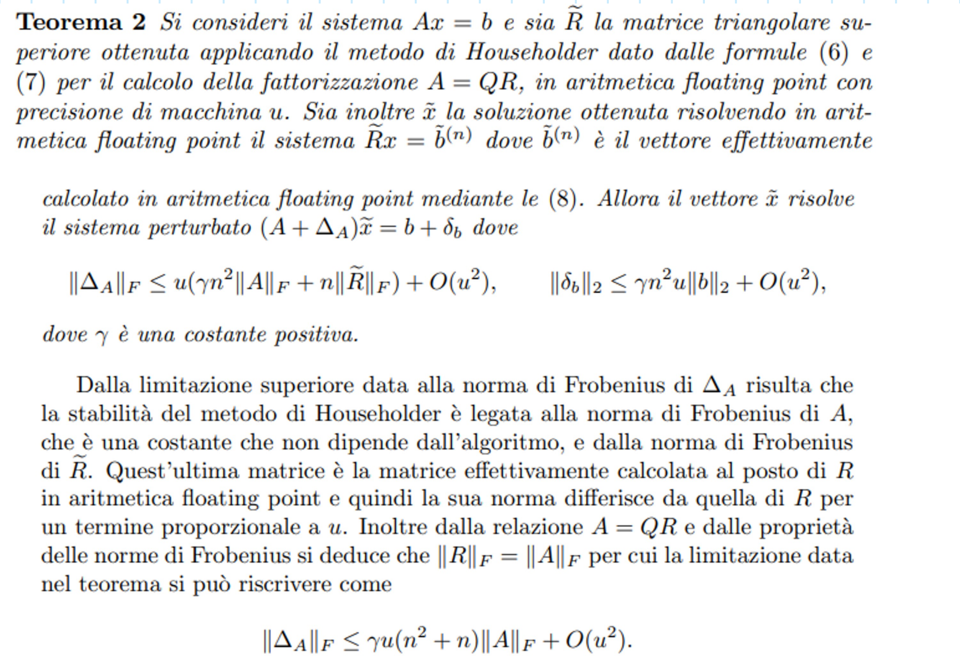
e dove A_k ha la forma (2).

Le relazioni che forniscono i valori di $a_{i,j}^{(k+1)}$ sono le seguenti

$$4(n-K_{+1})^2 \left[a_{i,j}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{i,j}^{(k)} & \text{se } j < k, \text{ se } i \le k \\ 0 & \text{se } j = k, \text{ e } i > k \\ a_{i,j}^{(k)} - \beta^{(k)} u_i^{(k)} \sum_{r=k}^{n} \bar{u}_r^{(k)} a_{r,j}^{(k)} & \text{se } i \ge k, j > k \end{cases} \right. \qquad (7)$$

Nel caso della risoluzione di un sistema lineare $Ax = b$ l'algoritmo può essere modificato aggiungendo il calcolo di $b^{(k+1)} = M_k b^{(k)}$ mediante

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \beta_k u_i^{(k)} \sum_{r=k}^{n} \bar{u}_r^{(k)} b_r^{(k)}, \quad i = k, \ldots, n. \qquad (8)$$



Teorema 2 *Si consideri il sistema $Ax = b$ e sia $\widetilde{R}$ la matrice triangolare superiore ottenuta applicando il metodo di Householder dato dalle formule (6) e (7) per il calcolo della fattorizzazione $A = QR$, in aritmetica floating point con precisione di macchina u. Sia inoltre $\tilde{x}$ la soluzione ottenuta risolvendo in aritmetica floating point il sistema $\widetilde{R}x = \tilde{b}^{(n)}$ dove $\tilde{b}^{(n)}$ è il vettore effettivamente calcolato in aritmetica floating point mediante le (8). Allora il vettore $\tilde{x}$ risolve il sistema perturbato $(A + \Delta_A)\widetilde{x} = b + \delta_b$ dove*

$$\|\Delta_A\|_F \leq u(\gamma n^2 \|A\|_F + n\|\widetilde{R}\|_F) + O(u^2), \qquad \|\delta_b\|_2 \leq \gamma n^2 u \|b\|_2 + O(u^2),$$

dove γ è una costante positiva.

Dalla limitazione superiore data alla norma di Frobenius di Δ_A risulta che la stabilità del metodo di Householder è legata alla norma di Frobenius di A, che è una costante che non dipende dall'algoritmo, e dalla norma di Frobenius di $\widetilde{R}$. Quest'ultima matrice è la matrice effettivamente calcolata al posto di R in aritmetica floating point e quindi la sua norma differisce da quella di R per un termine proporzionale a u. Inoltre dalla relazione $A = QR$ e dalle proprietà delle norme di Frobenius si deduce che $\|R\|_F = \|A\|_F$ per cui la limitazione data nel teorema si può riscrivere come

$$\|\Delta_A\|_F \leq \gamma u(n^2 + n)\|A\|_F + O(u^2).$$

Differenze

G costa meno ; meno stabilità numerica

H costo doppio ; + stabilità numerica