FORMA NORMALE DI SCHUR

mercoledì 7 dicembre 2022 09:29

Definizione

$U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è una matrice unitaria se $U^H U = U U^H = I$ dove A^H è la matrice trasposta Hermitiana di A cioè la mat. che si ottiene trasponendo A e coniugando gli elt. complessi

Definizione

Una matrice unitaria e reale è detta matrice ortogonale

Teorema Forma normale di Schur

Per ogni matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\exists$ T matrice triangolare superiore e una matrice unitaria U t.c. $U^H A U = T$

idea dimostrazione

Per induzione su dim $A = n$

P.B $n = 1 \Rightarrow A = T$ è un numero!

P.I

1. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$
2. $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$
3. x normalizzato $\Rightarrow x^H x = 1$
   base ortonormale $B = \underbrace{\{y_2, \dots, y_n\}}_{\substack{\cap \\ \text{spazio ortogonale a } x = \{w \in \mathbb{C}^n \mid \langle w^H x \rangle = 0\}}}$
4. Costruisco $Q = [x \mid y_2 \mid y_3 \mid \dots \mid y_n]$
   a Q è unitaria $Q^H Q = I$
   b $Q e^1 = x$
   c $e^1 = Q^H x$
5. $Q^H A Q \overset{?}{=} \left[\begin{array}{c|c} \lambda & u^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}\right]$ ⑥ dim
   $A_{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}$ dim 7
6. Verifico che $Q^H A Q e^1 = \lambda e^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
7. Uso hp. induttiva $A_{n-1} = U_{n-1} T_{n-1} U_{n-1}^H$

$$U_n = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$U_n^H A U_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{n-1}^H \end{bmatrix} \underbrace{Q^H A Q}_{\shortparallel} \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1}^H \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda & u^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & u^T U_{n-1}^H \\ \hline 0 & \underbrace{T_{n-1}}_{\substack{\shortparallel \\ U_{n-1}^H A_{n-1} U_{n-1}}} \end{array}\right]$$

Conclusione 8. $U_n^H A U_n$ è triangolare

Osservazione

La forma normale di Schur non è unica. Infatti scegliendo diversi ordinamenti degli autovalori arriviamo a forme normali $\neq$ tra loro

Definizione

Una matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice quasi triangolare se si può scrivere nella forma $T = \begin{bmatrix} T_{1,1} & \cdots & T_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & T_{m,m} \end{bmatrix}$

dove $T_{i,i}$ per $i = 1, \dots, m$ possono essere matrici 2×2 con coppie di autovalori complessi coniugati

oppure matrici 1×1, cioè numeri reali

Osservazione

Gli autovalori di una matrice quasi triangolare sono gli autovalori delle sottomatrici $T_{i,i}$ per $i = 1, \dots, m$

Esempio

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{5} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{matrix}} \end{matrix} \end{pmatrix} = T$$

T è quasi triangolare

Autovalori di T = autovalori di $\boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}} \cup$ autovalori di $\boxed{\begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{matrix}} \cup \boxed{5}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad 3, 1 \quad \cup \quad 3+i, 3-i \quad \cup \ 5$

Teorema Forma reale di Schur

Per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\exists$ una matrice quasi triangolare superiore $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e una matrice ortogonale $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tali che: $Q^T A Q = T$

Applicazioni

Definizione

A si dice Hermitiana se $A^H = A$

Conseguenza 1

- Se $U^H A U = T$ è la forma di Schur della matrice hermitiana $A \Rightarrow$

  $T^H = (U^H A U)^H = U^H \underline{A^H} U^{H^H} = U^H \underline{A} U = T$
- Cioè T è Hermitiana ed essendo triangolare è diagonale
- Inoltre gli elt. diagonali di T cioè $t_{i,i} = \overline{t_{i,i}}$ e quindi sono reali.
- Cioè le matrici Hermitiane sono diagonalizzabili con una trasformazione per similitudine unitaria

Definizione

A è antihermitiana se $A = -A^H$

Conseguenza 2

- Se A è antihermitiana $\Rightarrow T$ è antihermitiana
- Cioè T è una matrice diagonale t.c. $t_{i,i} = -\overline{t_{i,i}}$
- Cioè una mat. antihermitiana è diagonalizzabile da una trasformazione ortogonale e i suoi autovalori sono immaginari puri

Teorema

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ha forma normale di Schur diagonale $\iff \underbrace{A^H A = A A^H}$

classe delle matrici normali

idea dimostrazione

Introduzione dim un enunciato equivalente cioè "Sia T forma di Schur di A, allora $A^H A = A A^H \iff T^H T = T T^H$"

(1) T diagonale $(\Rightarrow T^H T = T T^H) \Rightarrow A^H A = A A^H$

(2) Se $A^H A = A A^H \Rightarrow T^H T = T T^H$

$A^H A = U^H T^H U U^H T U$
$A A^H = U^H T U U^H T^H U$

(2A) $T^H T = T T^H \Rightarrow T$ diagonale

dim 2A Per induzione su n

P.B ok

P.I
- leggo $T^H T = T T^H$ sull'elt $(1,1)$ cioè $\overline{t_{1,1}}\, t_{1,1} = \sum_{j=1}^{n} t_{1,j} \overline{t_{1,j}} \Rightarrow t_{1,j} = 0 \quad \forall j = 2, \dots, n$
- $T = \begin{bmatrix} t_{1,1} & 0 \\ 0 & T_{n-1} \end{bmatrix}$
- $T^H T = T^H T \Rightarrow T_{n-1}^H T_{n-1} = T_{n-1} T_{n-1}^H \overset{\text{hp. ind.}}{\Rightarrow} T_{n-1}$ è diag. $\Rightarrow$ T è diagonale

Conclusione

Conseguenza

- Una matrice unitaria è una mat. normale $\Rightarrow$ ha una forma di Schur diagonale
- Inoltre $A^H A = I \Rightarrow |t_{i,i}|^2 = 1$ cioè le mat. unitarie sono diagonalizzabili da una trasformazione ortogonale e hanno autovalori di modulo 1