ZERI DI FUNZIONE

martedì 27 dicembre 2022 13:35

Introduzione

Bisogna individuare dei metodi che permettano di approssimare le soluzioni di un' eq. o di un sistema di equazioni attraverso la generazione di successioni che ad esse convergano

ZERI DI FUNZIONI CONTINUE DA $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

Setting $\mapsto$ $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ continua t.c. $f(a)f(b) < 0 \overset{\text{Teo zeri}}{\Longrightarrow} \exists\, \alpha \in [a,b]$ t.c. $f(\alpha) = 0$

Obiettivo $\mapsto$ generare una successione $\{x_k\}$ che converge ad α

Come? $\mapsto$ Tramite il metodo della bisezione o dicotomico

1 si pone $a_0 = a$ e $b_0 = b$

2 si calcola $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ = p.to medio del segmento $[a_k, b_k]$ $\forall k = 0, 1, \dots$

3 si calcola $f(c_k)$

3A Se $f(c_k) = 0 \Rightarrow \alpha = c_k$ è soluzione $\to$ fine

3B Se $f(c_k)f(a_k) < 0 \Rightarrow f$ si annulla in $\alpha \in [a_k, c_k] \Rightarrow$ ripeto il procedimento sull'intervallo $[a_k, c_k]$ e pongo $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_k$

3C Se $f(c_k)f(a_k) > 0 \Rightarrow f$ si annulla in $\alpha \in [c_k, b_k] \Rightarrow$ ripeto il procedimento sull'intervallo $[c_k, b_k]$ e pongo $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$

4 Mi fermo fin quando non ho ottenuto un intervallo di ampiezza piccola cioè $b_{k+1} - a_{k+1} < \varepsilon$

Osservazioni $\mapsto$ $\varepsilon_k = b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b-a)$ converge a 0 in modo esponenziale

Listing 1: Function bisezione

```
function alfa=bisezione(a,b)
% applica il metodo di bisezione per approssimare uno zero
% della funzione f(x) sull'intervallo [a,b] dove f(x) e' una
% funzione predefinita tale che f(a)f(b)<0
  maxit = 100;
  fa = f(a);
  if fa*f(b)>0
    disp('Dati inconsistenti')
    break
  end
  for k=1:maxit
    c = (a+b)/2;
    fc = f(c);
    if fc*fa<=0
      b = c;
    else
      a = c;
    end
    if b-a < eps*min(abs(a),abs(b))
      break
    end
  end
  if k==maxit
    disp('attenzione: raggiunto il numero massimo di iterazioni')
  end
  alfa=c;
```

In $\mathcal{F}$ $f(x)$ è affetto da errore

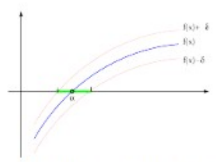

Figura 2: Problema degli zeri in caso di incertezza numerica

Alla Sol. α del problema viene sostituito l'intervallo di incertezza

$I = \left[\alpha - \frac{\delta}{f'(\alpha)}, \alpha + \frac{\delta}{f'(\alpha)}\right]$ è l'appross. al 1 ord dell'intervallo di incertezza

Se $|f'(\alpha)|$ è piccola $\Rightarrow$ più ampio è I

Intuitivamente più è oriz. la r nel punto in cui interseca l'asse x più è ampia {asse x $\cap$ striscia individuata da $f(x) \pm \delta$}

Problema

Il numero di passi che richiede è molto elevato ed è un problema quando il valore di $f(x)$ è alto

METODI DEL PUNTO FISSO

Introduzione

- I metodi del p.to fisso si ottengono trasformando il problema $f(x) = 0$ (cioè del calcolo di zeri di una funzione) in un problema del punto fisso del tipo $x = g(x)$
- Il metodo consiste nel trovare quei numeri α che sono trasformati da $g(x)$ in se stessi (i cosidetti punti fissi)
- La trasformazione si può ottenere in vari modi es: $g(x) = x - \frac{f(x)}{h(x)}$ con $h(x) \neq 0$
- In questo modo si genera una successione di p.ti che se converge, converge a un p.to fisso di $g(x)$ purché $g(x)$ sia continua

$\begin{cases} x_{k+1} = g(x_k) & k = 0, 1, 2 \dots \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ metodo di punto fisso $\vee$ metodo di iterazione funzionale associato a g

Se $\ell = \lim_k x_{k+1} = \lim_k g(x_k) = g(\lim_k x_k) = g(\ell)$ dove ℓ è un p.to fisso per g.

Diamo ora condizioni di convergenza:

Teorema 1

Sia 1 $I = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$

2 $g(x) \in C^1(I)$

3 $\alpha = g(\alpha)$

4 $\rho > 0$

5 Sia $\lambda = \max_{|x-\alpha| \le \rho} |g'(x)|$

Se $\lambda < 1 \Rightarrow \forall x_0 \in I$, posto $x_{k+1} = g(x_k)$ $k = 0,1,\dots$ vale • $|x_k - \alpha| \le \lambda^k \rho$

Per cui $x_k \in I$ e $\lim_k x_k = \alpha$

• Inoltre α è l'unico p.to fisso di $g(x)$ in $[a,b]$

Idea dim

Esistenza

Per induzione su K

- P.B $k=0$, $x_0 \in I$ e $|x_0 - \alpha| \le \lambda^0 \rho = \rho$
- P.I Assumo $|x_k - \alpha| \le \lambda^k \rho$

(A) $x_{k+1} - \alpha \overset{(1)}{=} g(x_k) - g(\alpha) \overset{(2)}{=} g'(\xi_k)(x_k - \alpha)$ $\quad |\xi_k - \alpha| < |x_k - \alpha|$

per hp $\begin{cases} g(\alpha) = \alpha \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$ (3)

lagrange (lo posso applicare perchè $x_k \in I$ per hp. ind. e $\xi \in I$)

(B) $\left.\begin{matrix} x_k \in I \\ \xi_k \in I \end{matrix}\right\} \Rightarrow |g'(\xi_k)| \le \lambda$ *

(C) Applico hp. indutt. $\Rightarrow |x_{k+1} - \alpha| \le \underline{|g'(\xi_k)|}\,\underline{|(x_k - \alpha)|} \le \underline{\lambda} \cdot \underline{\lambda^k \rho} = \lambda^{k+1} \rho$

Unicità

Per R.A.A. $\mapsto \beta \ne \alpha$ p.ti fissi $\Rightarrow \alpha - \beta = g(\alpha) - g(\beta) = g'(\xi)(\alpha - \beta) \Rightarrow g'(\xi) = 1$ ↯ (5)

Osservazioni

In pratica $\mapsto$ Ho a disposizione $[a,b] \ni \alpha$, $|g'(x)| < 1$

Con una delle seguenti scelte $x_0 = a \vee x_0 = b$ $\{x_k\} \downarrow \alpha$

Infatti se $\alpha \in$ metà sx di $I \Rightarrow \rho = \alpha - a$ su $I' = [a, a+\rho]$

se $\alpha \in$ metà dx di $I \Rightarrow \rho = b - \alpha$ su $I' = [\alpha - \rho, b]$

Basta scegliere a caso uno dei 2 estremi, se ho conv. ho finito

Altrimenti si arrestano le iterazioni e si riparte con l'altro estremo

⚠ C'è convergenza locale (perchè vale in un intorno opportuno di α)

Nei sistemi iterativi c'è converg. globale (vale $\forall x_0$)

Teorema 2 È il Teo 1 in $\mathbb{F}$

Nelle hp del Teo 1 sia $\tilde{x}_k$ generata da $\tilde{x}_{k+1} = g(\tilde{x}_k) + \delta_k$

δ_k: errore $|\delta_k| < \delta$

Posto $\sigma = \frac{\delta}{1-\lambda}$ se $\sigma < \rho \Rightarrow |\tilde{x}_k - \alpha| \le (\rho - \sigma)\lambda^k + \sigma$

$(\rho - \sigma)\lambda^k \to 0$, σ: int. di incertezza

Idea dim

Per ind. su K

P.B $k=0$ disug. è soddisf.

P.I come Teo 1 considerando $\tilde{x}_{k+1}$ e l'errore δ_k

La Tesi segue da $\lambda\sigma + \delta = \frac{\lambda\delta}{(1-\lambda)} + \delta = \sigma$

Osservazioni

- L'int. di incertezza è $\subset [a-\sigma, a+\sigma]$
- Si può det. il comportamento della ↓ tramite lo studio del sgn di $g'(x)$

Se $x_0 > \alpha \Rightarrow \{x_K\}$ decr.
Se $x_0 < \alpha \Rightarrow \{x_K\}$ cresc.] se $0 < g'(x) < 1$

Se $x_K > \alpha \Rightarrow x_{K+1} < \alpha$
se $x_K < \alpha \Rightarrow x_{K+1} > \alpha$ } $\Rightarrow \{x_{2K}\}$ e $\{x_{2K+1}\}$ ↓ una cresc e l'altra decresc.
se $-1 \le g'(x) < 0$

- Se $\alpha \in [a,b]$ non centrato e $g'(x) > 0 \Rightarrow \{x_K\}$ ↓ α in modo monotono

Se $\alpha \in [a,b]$ non centrato e $g'(x) < 0 \Rightarrow$ Può accadere che $x_1 \notin [a,b]$ ma sia più vicino a α
$\Rightarrow g(x_1)$ può non $\exists$

È necessario $[a,b] = [a-\rho, a+\rho]$

- $\xi_K \in [\alpha, x_K] \Rightarrow$ se $x_K \to \alpha \Rightarrow \xi_K \to \alpha \Rightarrow |g'(\xi_K)| \longrightarrow |g'(\alpha)|$

- le iterazioni si arrestano quando $\underbrace{|x_K - x_{K+1}|}_{} < \varepsilon$
è legata a $|x_K - \alpha| = \left| \frac{x_K - x_{K+1}}{1-g'(\xi_K)} \right| \le \frac{\varepsilon}{|1-g'(\xi_K)|}$

Velocità di convergenza

Definizione

Sia $\{x_K\}$ una succ. t.c. $\lim_K x_K = \alpha$. Supp che $\exists \lim_K \left| \frac{x_{K+1} - \alpha}{x_K - \alpha} \right| = \gamma$. La conv di x_K ↓ α è detta:

- lineare se $0 < \gamma < 1$
- sublineare se $\gamma = 1$
- superlineare se $\gamma = 0$
  ↳ se $p > 1$ t.c. $\exists \lim_K \frac{|x_{K+1} - \alpha|}{|x_K - \alpha|^p} = \sigma$ con $0 < \sigma < +\infty$ si dice che x_K ↓ α con ordine p
    - se $p = 2$ conv. quadratica
    - se $p = 3$ conv. cubica

È possibile deter. la velocità di ↓ mediante la derivata

Teorema 3 Conv. lineare

Sia $g(x) \in C^1([a,b])$ e $\alpha \in (a,b)$ t.c. $g(\alpha) = \alpha$

Se $\exists x_0 \in [a,b]$ t.c. la succ. ↓ lin. ad α con fattore $\gamma \Longrightarrow |g'(\alpha)| = \gamma$

Viceversa se $0 < |g'(\alpha)| < 1 \Longrightarrow \exists$ int. I di α $I \subset [a,b]$ t.c. $\forall x_0 \in I$ $\{x_K\}$ ↓ α in modo lineare con $\gamma = |g'(\alpha)|$

idea dim

$\Longrightarrow$ Hp: $\{x_K\}$ t.c. $x_{K+1} = g(x_K)$ con x_K ↓ α linear.

- $\frac{x_{K+1} - \alpha}{x_K - \alpha} \overset{g(\alpha)=\alpha}{=} \dots \overset{\text{Lagrange}}{=} g'(\xi_K)$

- x_K ↓ $\alpha \Rightarrow \xi_K$ ↓ α

Tesi
- $|g'(\alpha)| = \lim_K \left| \frac{x_{K+1} - \alpha}{x_K - \alpha} \right| = \gamma$

$\Longleftarrow$ $0 < |g'(\alpha)| < 1$

g' continua $\Rightarrow |g'(x)| < 1$ ($\exists$ intorno I per cui vale)

Applico Teo p.to fisso. $\Rightarrow$ le succ generate da x_0 in I ↓ α

Si conclude come nel passo giallo

Tesi $\{x_K\}$ ↓ α lin.

Teorema 4 Conv. sublineare

Sia $g(x) \in C^1([a,b])$ e $\alpha \in (a,b)$ t.c. $g(\alpha) = \alpha$

Se $\exists x_0 \in [a,b]$ t.c. la succ. ↓ subln. ad $\alpha \Longrightarrow |g'(\alpha)| = 1$

Viceversa se $|g'(\alpha)| = 1 \Longrightarrow \exists$ int. I di α $I \subset [a,b]$ t.c. $\forall x \in I$ $x \neq \alpha$ con $|g'(x)| < 1$ che non cambia sgn su $I \Rightarrow$ Tutte le $\{x_K\}$ generate da $x_0 \in I$ ↓ α subln idea dim

Prima parte analoga a Teo 3

Seconda parte $\mapsto$ ① $\{x_k\}$ generate da x_0 $\downarrow \alpha$

② Come Teo 3

idea dim 1

Ⓐ Se $x_k \in I \Rightarrow x_{k+1} \in I$

- $|x_{k+1} - \alpha| \underset{\text{uso } g}{=} \dots \underset{\text{uso lagr.}}{=} \dots \underset{|g'(\xi_k)|<1}{<} |x_k - \alpha|$
- Questo mi dice che $|x_k - \alpha|$ è decresc.

Ⓑ Se $g'(x) \geq 0$ su $[a,b] \Rightarrow$ • $\{x_k\}$ è monot. limit. $\Rightarrow$ • $\{x_k\} \downarrow \beta = g(\beta)$

- se $\beta \neq \alpha$ ↯

Ⓒ Se $g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ • $G(x) = g(g(x))$ — $x_{2k+2} = G(x_{2k})$, $x_{2k+1} = g(x_{2k})$

- $G(\alpha) = \alpha$
- $G'(x) \geq 0$
  - $\to$ riapplico Ⓑ
- Concludo che il lim pari = lim disp. $= \alpha$.

Teorema 5 Conv. superlineare

Sia $g(x) \in C^p([a,b])_{p>1}$ e $\alpha \in (a,b)$ t.c. $g(\alpha) = \alpha$

Se $\exists x_0 \in [a,b]$ t.c. la succ. $\downarrow$ suplin. α con ordine p $\Longrightarrow$ $|g^{(k)}(\alpha)| = 0$ $\forall k = 1, \dots, p-1$ e $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$

Viceversa se $0 < |g^{(k)}(\alpha)| = 0$ $\forall k = 1, \dots, p-1$ e $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$ $\Rightarrow \exists I$ int $\alpha \mid \forall x_0 \in I$ $\{x_k\} \downarrow \alpha$ in modo suplin con ord conv p.

idea dim

$\Longrightarrow$ Se $\{x_k\} \downarrow \alpha$ con ord p $\Rightarrow$ $\lim \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = \sigma$ finito $\Rightarrow 0 < q < p \Rightarrow \lim \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^q} = 0$

Dim che $g^{(q)}\alpha = 0$ per $q = 1 \dots p-1$

Induz. su q

PB $q = 1$ (Teo 3 – a)

PI Sviluppo $g(x)$ in serie di Taylor in un int di α.

Applico Ip. indut.

$\Longleftarrow$ $\{x_k\} \downarrow \alpha$ super $\Rightarrow g'(\alpha) = 0$

Applico p.to fisso $\Rightarrow \{x_k\} \downarrow \alpha$

Uso le Ip sulle derivate

Lim in k

Definizione

$\{x_k\} \downarrow \alpha$ con ordine $\geq p$ se $\exists \beta$ t.c. $|x_{k+1} - \alpha| \leq \beta |x_k - \alpha|^p$

Confronto tra metodi

$g_1(x)$, $g_2(x)$ (lineare)

riduzione dell'errore $\beta_1 \gamma_1^{\overbrace{k_1} = \beta_2 \gamma_2^{k_2}}$ iterazioni $\xrightarrow{\text{passo ai log}}$ $k_1 = k_2 \frac{\log \gamma_2}{\log \gamma_1}$

I metodo è più conv. se $\underbrace{c_1 k_1 < c_2 k_2}_{\text{costo globale}} \Leftrightarrow \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{\log \gamma_1}{\log \gamma_2}$

$g_1(x)$, $g_2(x)$ sublineare

$\varepsilon_k \leq \beta \varepsilon_{k-1}^p \longrightarrow \varepsilon_k \leq \eta r^{p^k}$

$\eta_1 r_1^{p_1^{k_1}} = \eta_2 r_2^{p_2^{k_2}} \xrightarrow{\log r_2} k_1 = k_2 \frac{\log p_2}{\log p_1}$

I metodo è più conv $\underbrace{c_1 k_1 < c_2 k_2} \Leftrightarrow \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{\log p_1}{\log p_2}$

METODI DEL PUNTO FISSO

Servono per l'appross. numerica degli zeri di una f.

Metodo delle secanti

Sia $f(x) \in C^1([a,b])$ e $\alpha \in [a,b]$ t.c. $f(\alpha)=0$

$g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$ m costante

Graficamente

- Si traccia la retta passante per $(x_k, f(x_k))$ di coeff. angolare m
- $P = (x_{k+1}, 0)$ P è p.to di intersez. tra retta e asse x
- $g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m}$ $\Rightarrow$
- cond. suff. di conv è $1 - \frac{f'(x)}{m} < 1$ $\Rightarrow |m| \geq \frac{1}{2}|f'(x)|$ e avere lo stesso sgn di f'
- se $m = f'(\alpha)$ $\Rightarrow$ conv super e

Metodo delle Tangenti di Newton

E' una modifica del metodo delle secanti cioè m si fa variare, m = l'inclinazione della retta

Si sceglie come inclinazione quella della retta tangente al $\Gamma f(x)$ nel $P = (x_k, f(x_k))$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ ⚠ f deve essere derivabile

Teorema 6

Sia $f(x) \in C^2([a,b])$ $\alpha \in (a,b)$ t.c. $f(\alpha)=0$

Se $f'(\alpha) \neq 0$ $\exists\, I \subseteq [a,b]$ t.c. $\forall x_0 \in I$ x_k gener. dal met. di Newton conv α

Inoltre se $f''(\alpha) \neq 0$ la conv. è superlineare di ordine 2
se $f''(\alpha) = 0$ la conv. è superlineare di ordine ≥ 2

Idea dim

1 Dim la conv. delle succ. a partire da $x_0 \in I$

- Calcolo $g'(x)$ $\left.\begin{array}{l} g'(\alpha)=0 \\ g' \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow |g'(x)| < 1$ ($\exists\, I$ int)
- Applico p.to fisso a g'

2 Dim la conv. quadratica

- Considero $\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2} \xrightarrow{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x)}{f'(x)}} \xrightarrow{\text{sviluppo in un int di } x_k} \longrightarrow$ ottengo $\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

sostituisco qui

- Passo al $\lim_{k}$ $\Rightarrow$ Tesi

Teorema 7

Sia $f(x) \in C^p([a,b])$ con $p>2$ e $\alpha \in (a,b)$ t.c. $f(\alpha)=0$

Se $f'(\alpha) = \dots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0$ e $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$ e $f'(x) \neq 0$ per $x \neq \alpha$ $\Rightarrow$ $\exists\, I$ t.c. $\forall x_0 \in I$ $\underbrace{\{x_n\}}_{\text{gener. da Newt.}} \downarrow \alpha$

Inoltre α è l'unico zero di $f(x)$

La conv è lineare $\gamma = 1 - \frac{1}{p}$

Idea dim

Devo dim che $\underbrace{g' \in C^1[a,b]}$ $\overset{\text{P.TO FISSO}}{\Rightarrow}$ Concludo con Teo 1

- g continua in α $\longmapsto$ Hopital / $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \alpha$
- g derivabile in α $\longmapsto$ lim rapp. incrementale $= \ell = \frac{1}{p}$ $\Rightarrow g'(\alpha) = 1 - \ell$
- g' continua in α $\longmapsto$ $\lim_{x \to \alpha} g'(x) = 1 - \frac{1}{p}$

$$g(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x = \alpha \\ x - \frac{f(x)}{f'(x)} & \text{se } x \neq \alpha \end{cases}$$

Teorema 8

Se f è $C^2([a,b])$ su $I=[\alpha, \alpha+\rho]$
$f'(x)\, f''(x) \geq 0$ per $x \in I$
$\Bigg\}\ \forall x_0 \in I \quad \{x_k\} \downarrow \alpha$ decrescendo

Applicazioni di Newton

Calcolo del reciproco in $\mathbb{F}$

Calcolo della $\sqrt[2]{\ }$ in $\mathbb{F}$

Metodo di Newton in $\mathbb{C}$

$f(x) = (x-\alpha)\, q(x)$ dove $q(\alpha) \neq 0$ e $q'(\alpha) \neq 0$

$$g(x) = x - \frac{(x-\alpha)\, q(x)}{q(x) + (x-\alpha)\, q'(x)}$$

$$g(x) - \alpha = (x-\alpha)^2 \underbrace{S(x)}_{\leq \beta \text{ cost. positiva}} \quad \Rightarrow |g(x) - \alpha| \leq \beta\, |x-\alpha|^2$$

Quindi $\{x_k\} \downarrow \alpha$ quadr.

se $q'(\alpha) = 0 \Rightarrow$ conv di ordine > 2