

I teoremi di Gerschgorin

Dario A. Bini, Beatrice Meini
Università di Pisa

10 ottobre 2019

Sommario

Questo modulo didattico contiene risultati relativi ai teoremi di Gerschgorin che permettono di localizzare nel piano complesso gli autovalori di una matrice.

1 Introduzione

In certe situazioni è utile disporre di criteri facilmente applicabili che forniscano localizzazioni nel campo complesso degli autovalori di una matrice assegnata. Un esempio significativo a questo riguardo è dato dallo studio della stabilità di un sistema dinamico governato da un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

dove $y(t)$ è una funzione da \mathbb{R} a valori in \mathbb{R}^n derivabile con continuità ed A è una matrice $n \times n$. Si può dimostrare che, se la matrice A ha autovalori con parte reale minore o uguale a zero, tutte le soluzioni di questo problema, ottenute al variare delle condizioni iniziali $y(0) = y_0$, sono limitate per ogni valore di t . Cioè, come si usa dire, il sistema dinamico rappresentato dal sistema di equazioni differenziali è stabile.

Dim. La soluzione si può scrivere come

$$y(t) = \exp(tA)y_0$$

dove si definisce

$$\exp(tA) = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \cdots,$$

e la serie è convergente per ogni valore di t . Consideriamo per semplicità il caso in cui la matrice A sia diagonalizzabile, cioè esiste S non singolare tale che $A = SDS^{-1}$, dove D è diagonale; allora $\exp(tA) = S \exp(tD) S^{-1}$ per cui gli autovalori di tA sono $e^{t\alpha_i}$, con α_i autovalori di A . Se il generico autovalore α lo scriviamo come $\alpha = \beta + i\gamma$, con $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ dove i è l'unità immaginaria,

allora $e^{t\alpha} = e^{t\beta} e^{it\gamma} = e^{t\beta} (\cos(t\gamma) + i \sin(t\gamma))$. Mentre il secondo fattore è limitato avendo modulo 1, il primo fattore $e^{t\beta}$ è limitato se e solo se $\beta \leq 0$. La dimostrazione nel caso generale può essere fatta considerando la forma normale di Jordan di A e trattando separatamente il caso di un singolo blocco di Jordan. \square

Per valutare la stabilità di un sistema dinamico basta allora controllare che le parti reali degli autovalori siano minori o uguali a zero. In altre situazioni occorre controllare che gli autovalori di una matrice abbiano tutti modulo minore o uguale a 1. In altri casi, quando ad esempio si deve verificare se una matrice reale simmetrica è definita positiva, ci basta controllare che i suoi autovalori siano tutti positivi.

Certamente una possibilità per accertarsi che queste condizioni siano verificate consiste nel calcolare tutti gli autovalori e controllare se sono valide le proprietà richieste. Ma ciò comporta un costo troppo elevato, infatti calcolare gli autovalori di una matrice ha un costo computazionale non trascurabile.

I teoremi di Gerschgorin forniscono una valida alternativa al calcolo di tutti gli autovalori di una matrice A assegnata. Infatti essi permettono, con minimo sforzo computazionale, di determinare un insieme di dischi nel piano complesso la cui unione contiene tutti gli autovalori di A .

2 I teoremi di Gerschgorin

Nel seguito $A = (a_{i,j})$ è una matrice $n \times n$ ad elementi reali o complessi.

Teorema 1 (Primo teorema di Gerschgorin) *Gli autovalori di A appartengono all'insieme*

$$\cup_{i=1}^n K_i, \quad K_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|\}.$$

Inoltre se $v = (v_i)$ è un autovettore corrispondente all'autovalore λ di A , cioè $Av = \lambda v$, allora $\lambda \in K_h$ dove h è tale che $|v_h| = \max_i |v_i|$. In altri termini un autovalore λ appartiene a quei cerchi che corrispondono alle componenti di modulo massimo di un autovettore corrispondente.

Dim. Siano λ e v rispettivamente autovalore e autovettore di A , cioè $Av = \lambda v$ e $v \neq 0$. Leggendo questa relazione nell' i -esima componente si ottiene:

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j = \lambda v_i$$

da cui

$$(a_{i,i} - \lambda) v_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} v_j.$$

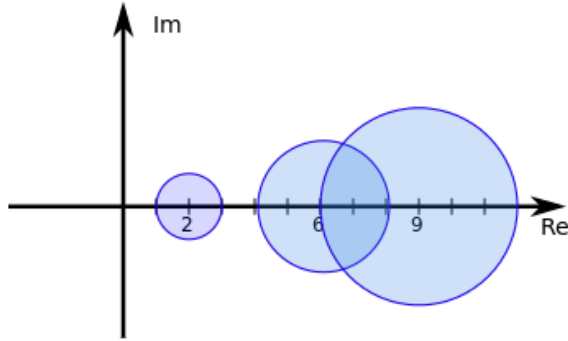


Figura 1: Cerchi di Gerschgorin della matrice A

Prendendo i moduli di entrambi i membri e usando la disuguaglianza triangolare si ha

$$|a_{i,i} - \lambda| \cdot |v_i| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \cdot |v_j|.$$

Scegliendo l'indice $i = h$ per cui $|v_h| \geq |v_j|$ per $j = 1, \dots, n$, si ottiene $|v_h| \neq 0$ e, dividendo per $|v_h|$ si ha

$$|a_{h,h} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j \neq h}^n |a_{h,j}| \frac{|v_j|}{|v_h|} \leq \sum_{j=1, j \neq h}^n |a_{h,j}|,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $|v_j|/|v_h| \leq 1$. Si conclude allora che $\lambda \in K_h$. \square

Gli insiemi K_i per $i = 1, \dots, n$ sono cerchi nel piano complesso detti cerchi di Gerschgorin di A . Ciascuno di essi ha per centro l'elemento diagonale corrispondente e per raggio la somma dei moduli degli elementi non diagonali che stanno sulla stessa riga.

Come esempio di applicazione si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

i cui cerchi hanno centro e raggio rispettivamente c_i e r_i per $i = 1, 2, 3$, dove $(c_1, r_1) = (2, 1)$, $(c_2, r_2) = (6, 2)$, $(c_3, r_3) = (9, 3)$. Il primo teorema di Gerschgorin ci permette di dire subito che questa matrice ha tutti autovalori con parte reale positiva e di modulo maggiore o uguale a 1. Ciò risulta evidente dalla figura 2 dove sono riportati in forma grafica i cerchi di Gerschgorin di A nel piano complesso.

Si osservi che poiché le matrici A e A^T hanno gli stessi autovalori, applicando il primo teorema di Gerschgorin ad A^T si ottiene che gli autovalori di A

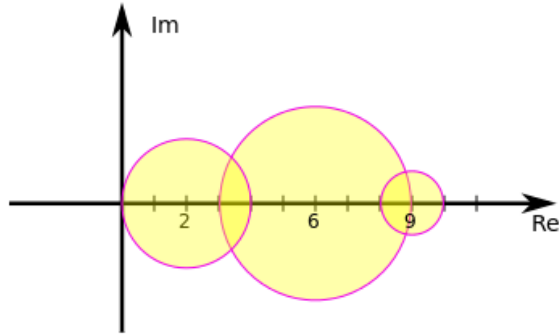


Figura 2: Cerchi di Gerschgorin della matrice A^T

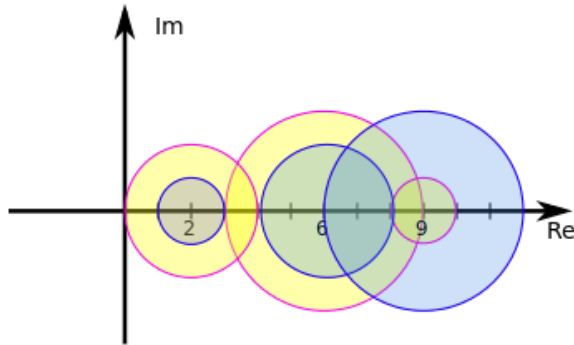


Figura 3: Cerchi di Gerschgorin delle matrici A e A^T

appartengono all'unione

$$\cup_{i=1}^n H_i, \quad H_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{j,i}|\}.$$

La figura 2 riporta graficamente i cerchi di Gerschgorin della matrice A^T .

Possiamo quindi dire che gli autovalori di A appartengono a

$$(\cup_{i=1}^n K_i) \cap (\cup_{i=1}^n H_i).$$

Attenzione che questa intersezione di unioni non coincide con l'unione delle intersezioni dei singoli cerchi. Nelle due figure 3 e 4 si riportano i cerchi di Gerschgorin relativi alle matrici A e A^T e l'intersezione dell'unione dei cerchi relativi rispettivamente ad A e ad A^T .

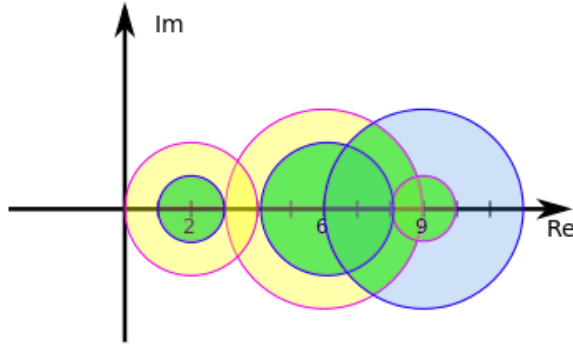


Figura 4: Intersezione in verde dell'unione dei cerchi di Gerschgorin di A e dell'unione di quelli di A^T

In generale non è vero che ogni disco contiene un solo autovalore. Però sotto opportune condizioni si può dire molto di più in questo senso.

Teorema 2 (Secondo teorema di Gerschgorin) *Si assuma che l'unione dei cerchi di Gerschgorin sia formata da due sottoinsiemi disgiunti M_1 , e M_2 , cioè $\cup_i K_i = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, dove M_1 è costituito da n_1 cerchi, e M_2 è costituito da n_2 cerchi con $n_1 + n_2 = n$. Allora in M_1 sono contenuti n_1 autovalori e in M_2 sono contenuti n_2 autovalori.*

Dim. Supponiamo per semplicità che M_1 sia costituita dai primi n_1 cerchi. La dimostrazione di questo teorema si basa su un ragionamento "per continuità". Infatti si considera una matrice dipendente da un parametro $A(t) = D + t(A - D)$ dove D è la matrice diagonale che ha elementi diagonali uguali a quelli di A . È evidente che $A(0) = D$ e $A(1) = A$. Cioè $A(t)$ descrive i punti del segmento nello spazio delle matrici che unisce D con A . Dimostriamo prima che gli autovalori di $A(t)$ dipendono in modo continuo da t . Per fare questo diamo per buono un risultato classico sui polinomi che afferma che gli zeri di un polinomio sono funzioni continue dei coefficienti. Poiché gli autovalori di una matrice sono gli zeri del polinomio caratteristico $\det(A(t) - \lambda I)$, e poiché i coefficienti del polinomio caratteristico di una matrice dipendono in modo polinomiale, e quindi continuo, dagli elementi di una matrice, possiamo affermare che gli autovalori di $A(t)$ come zeri del polinomio caratteristico dipendono in modo continuo da t . Ora osserviamo che i cerchi di Gerschgorin $K_i(t)$ di $A(t)$ hanno centro $a_{i,i}$ e raggio tr_i , dove r_i è il raggio del cerchio di Gerschgorin K_i . Essi sono quindi contenuti dentro i K_i per ogni $0 \leq t \leq 1$. Quindi i primi n_1 cerchi della matrice $A(t)$ saranno disgiunti dai rimanenti cerchi per ogni $t \in [0, 1]$. Non è quindi possibile che al variare di t in $[0, 1]$ qualche autovalore passi dall'insieme costituito dai primi n_1 cerchi all'insieme costituito dai rimanenti n_2 cerchi. Cioè

il numero di autovalori di $A(t)$ contenuti in M_1 rimane costante. Per $t = 0$ la matrice A coincide con D che è diagonale, e i suoi autovalori coincidono con i centri dei cerchi. Quindi M_1 contiene n_1 autovalori, tanti quanti sono i centri dei cerchi che lo costituiscono. \square

In particolare se K_i è un cerchio disgiunto da tutti gli altri allora K_i contiene un solo autovalore. Se i cerchi sono a due a due disgiunti allora ciascuno di essi contiene un solo autovalore.

Una conseguenza utile di questo risultato è la seguente. Se la matrice A è reale e se K_i è un cerchio disgiunto dagli altri allora K_i contiene un autovalore reale. Infatti, poiché gli autovalori non reali di una matrice reale compaiono a coppie complesse coniugate, se $\lambda \in K_i$ non fosse reale allora anche il coniugato $\bar{\lambda}$ sarebbe autovalore e apparterebbe ancora a K_i . È infatti il simmetrico di λ rispetto all'asse reale. Quindi K_i conterrebbe λ e $\bar{\lambda}$, cioè due autovalori che contraddirebbe il secondo teorema di Gerschgorin.

Una applicazione di questa proprietà alla matrice A dell'esempio mostrato sopra, ci dice che A ha un autovalore reale nell'intervallo $[1, 3]$. Infatti il primo cerchio di Gerschgorin è disgiunto dagli altri.

Definiamo una matrice $A = (a_{i,j})$ *fortemente dominante diagonale* se $|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$ per $i = 1, \dots, n$. È chiaro per il primo teorema di Gerschgorin che una matrice fortemente dominante diagonale è non singolare. Infatti, poiché il raggio di ogni cerchio di Gerschgorin è strettamente minore della distanza del centro dall'origine del piano complesso, nessun cerchio di Gerschgorin interseca l'origine e quindi zero non può essere autovalore di A .

Si consideri la seguente matrice tridiagonale

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Si può verificare che tutti i cerchi di Gerschgorin, dal secondo al penultimo hanno centro 2 e raggio 2, mentre il primo e l'ultimo hanno centro 2 e raggio 1. Ci si può chiedere se zero può essere autovalore di A . Il primo teorema di Gerschgorin non ci può aiutare in questo senso, infatti zero appartiene all'unione dei cerchi di Gerschgorin. Più precisamente appartiene alla frontiera dell'unione dei cerchi.

Il terzo teorema di Gerschgorin permette di dimostrare che in una situazione come quella dell'esempio non è possibile che zero sia un autovalore della matrice A . L'ipotesi aggiuntiva che occorre mettere è che A sia una matrice *irriducibile*. Ricordiamo che una matrice A si dice riducibile se esiste una matrice di permutazione P tale che PAP^T ha la forma

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

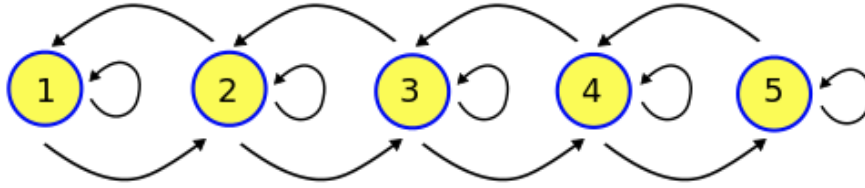


Figura 5: Grafo diretto associato alla matrice tridiagonale A

dove A_{11} e A_{22} sono matrici quadrate, cioè se esiste una permutazione di righe e colonne che porta A in forma triangolare a blocchi. Una matrice si dice irriducibile se non è riducibile.

La irriducibilità di una matrice può essere facilmente verificata utilizzando il concetto di *grafo diretto associato ad A* . Definiamo in modo informale questo concetto. Data una matrice $n \times n$ $A = (a_{i,j})$ consideriamo il grafo diretto $G[A]$ formato da n nodi, che numeriamo da 1 a n , nel quale un arco orientato unisce il nodo i al nodo j se $a_{i,j} \neq 0$. Ad esempio, la matrice tridiagonale A considerata poco fa ha il grafo diretto associato che si riporta per $n = 5$ in figura 5.

Un grafo diretto si dice *fortemente connesso* se per ogni coppia di nodi (i, j) esiste una successione di archi orientati che connette il nodo i col nodo j . In altri termini un grafo orientato è fortemente connesso se è possibile transitare per tutti i nodi percorrendo un cammino di archi orientati. Ad esempio il grafo in figura, associato alla matrice tridiagonale A è fortemente connesso.

Vale il seguente risultato.

Teorema 3 *Una matrice è irriducibile se e solo se il suo grafo associato è fortemente connesso.*

Dim. Si osserva innanzitutto che se P è una matrice di permutazione allora i grafi associati alle matrici A e $B = PAP^T$ differiscono unicamente per la numerazione dei nodi. Infatti, poiché $a_{i,j} = b_{\sigma_i, \sigma_j}$, dove σ_i è la permutazione associata alla matrice P , si ha che $a_{i,j} \neq 0$ se e solo se $b_{\sigma_i, \sigma_j} \neq 0$. Quindi un arco orientato unisce il nodo i col nodo j del grafo associato ad A se e solo se un arco orientato unisce il nodo σ_i col nodo σ_j nel grafo associato a B .

Ora, se la matrice A è riducibile allora esiste una matrice di permutazione P tale che $B = PAP^T$ è triangolare a blocchi cioè è del tipo

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{bmatrix}$$

con $B_{1,1}$ matrice $m \times m$. Quindi il grafo associato a B non ha archi che uniscono i nodi $i > m$ ai nodi $j \leq m$. Quindi non è fortemente connesso.

Viceversa, se il grafo associato ad A non è fortemente connesso si trova la matrice di permutazione che porta A nella forma triangolare a blocchi nel modo seguente. Sia (p, q) una coppia di nodi per cui a partire da p non si possa raggiungere q percorrendo archi orientati nel grafo. Allora costruiamo

l'insieme \mathcal{P} dei nodi raggiungibili da p e l'insieme \mathcal{Q} dei nodi non raggiungibili da p . Certamente $q \in \mathcal{Q}$ per cui \mathcal{Q} non è vuoto. Inoltre non possono esserci archi orientati che connettono nodi di \mathcal{P} con nodi di \mathcal{Q} . Infatti, in tal caso percorrendo uno di questi archi potremmo connettere il nodo p con un nodo di \mathcal{Q} che è assurdo. Allora basta ordinare le righe e le colonne di A in modo che in testa ci siano gli indici di \mathcal{Q} e in coda i nodi di \mathcal{P} . In questo modo il blocco in basso a sinistra con indice di riga in \mathcal{P} e indice di colonna in \mathcal{Q} sarà costituito tutto da elementi nulli. \square

Siamo ora pronti per enunciare il terzo teorema di Gerschgorin.

Teorema 4 (Terzo teorema di Gerschgorin) *Supponiamo che λ sia un autovalore di A con la seguente proprietà: se λ appartiene a K_i allora appartiene al bordo di K_i . In formula: $\lambda \in K_i \Rightarrow \lambda \in \partial K_i$, dove il simbolo ∂ denota il bordo. Se la matrice è irriducibile allora λ appartiene a tutti i cerchi di Gerschgorin e quindi appartiene all'intersezione delle frontiere dei cerchi.*

Dim. Ripercorriamo la dimostrazione del primo teorema di Gerschgorin. Se $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ e x_k è la componente di modulo massimo di x , allora vale

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| \left| \frac{x_j}{x_k} \right| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}|,$$

quindi λ appartiene al k -esimo cerchio. Per ipotesi λ deve stare sulla frontiera del cerchio, quindi nella relazione precedente vale l'uguaglianza, cioè

$$|a_{k,k} - \lambda| = \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| \left| \frac{x_j}{x_k} \right| = \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}|.$$

Ciò è possibile solo se $\left| \frac{x_j}{x_k} \right| = 1$ in corrispondenza di quegli indici j per cui $a_{k,j} \neq 0$. Poichè la matrice A è irriducibile il grafo associato è fortemente connesso, quindi esiste una successione di nodi $k_1 = k, k_2, k_3, \dots, k_m$ tale che $m \geq n$, $\{k_1, k_2, \dots, k_m\} = \{1, 2, \dots, n\}$, per cui nel grafo c'è un arco orientato che unisce k_i con k_{i+1} e quindi $a_{k_i, k_{i+1}} \neq 0$ per $i = 1, \dots, m-1$. Dal fatto che $a_{k_1, k_2} = a_{k, k_2} \neq 0$, ne segue che $\left| \frac{x_{k_2}}{x_{k_1}} \right| = 1$ e quindi anche x_{k_2} è una componente di x di modulo massimo per cui λ appartiene al k_2 -esimo cerchio di Gerschgorin. Ripetendo lo stesso ragionamento successivamente con $k = k_2, k_3, \dots, k_{m-1}$ si deduce che λ appartiene a tutti i cerchi di Gerschgorin e quindi a tutte le loro frontiere. \square

Come applicazione di questo risultato si dimostra facilmente che la matrice tridiagonale A in (1) è non singolare. Infatti essa è irriducibile, inoltre, se $\lambda = 0$ fosse autovalore allora starebbe sulla frontiera di tutti i cerchi a cui appartiene, cioè K_2, \dots, K_{n-1} . Quindi per il teorema dovrebbe appartenere alle frontiere di tutti i cerchi. Ma ciò è assurdo poiché $\lambda = 0$ non appartiene al primo e all'ultimo cerchio.

La matrice tridiagonale A di questo esempio è un caso particolare di matrice *irriducibilmente dominante diagonale*, cioè tale che

- A è irriducibile
- $|a_{i,i}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$
- esiste un indice k per cui $|a_{k,k}| > \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}|$

L'esempio mostrato della matrice tridiagonale irriducibilmente dominante diagonale è abbastanza speciale (infatti si può facilmente dimostrare per induzione che $\det A = n+1$). Però esistono ampie classi di problemi provenienti dalle applicazioni in cui intervengono matrici caratterizzate dall'essere irriducibilmente dominanti diagonali, per le quali il terzo teorema di Gerschgorin garantisce la non singolarità.

3 Estensione dei teoremi di Gerschgorin

I teoremi di Gerschgorin hanno delle generalizzazioni interessanti. Una di queste è data dal teorema di Brauer che coinvolge gli *ovali di Cassini*

Dati numeri complessi a, b e un numero reale $r \geq 0$, si definisce ovale di Cassini associato alla terna (a, b, r) il seguente insieme

$$C(a, b, r) = \{z \in \mathbb{C} : |(z-a)(z-b)| \leq r\}$$

Teorema 5 (Brauer) *Siano $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$ i raggi dei cerchi di Gerschgorin. Gli autovalori di A sono contenuti nell'insieme*

$$\cup_{i>j} C(a_{i,i}, a_{j,j}, r_i r_j).$$

Un'altra estensione proposta da Richard Varga si basa sulla seguente osservazione. Sia $d = (d_i)$ un vettore di n componenti positive. Se D è la matrice diagonale con elementi diagonali d_1, d_2, \dots, d_n , allora $A_d = D^{-1}AD$ ha gli stessi autovalori di A . Per cui applicando il primo teorema di Gerschgorin si arriva al seguente risultato.

Teorema 6 *Tutti gli autovalori di A sono contenuti nell'insieme*

$$\Omega = \cap_{d>0} \cup_{i=1}^n K_i(d), \quad K_i(d) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \frac{1}{d_i} \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| d_j\}.$$

dove $d = (d_i)$, $d_i > 0$.

Richard Varga ha dimostrato che per ogni elemento ξ della frontiera di Ω esiste una matrice $B = (b_{i,j})$ tale che $|b_{i,j}| = |a_{i,j}|$ che ha ξ come autovalore. Ciò mostra che l'insieme Ω fornisce una inclusione stretta degli autovalori.

4 Esempi d'uso dei teoremi di Gerschgorin

Sia $p(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ un polinomio con coefficienti a_0, a_1, \dots, a_{n-1} e si consideri la matrice *companion*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

È facile dimostrare per induzione su n che $\det(xI - C) = p(x)$ per cui gli zeri del polinomio $p(x)$ sono gli autovalori di C .

Il teorema di Gerschgorin applicato a C e a C^T permette allora di localizzare gli zeri di $p(x)$. Se $a_0 \neq 0$ allora lo stesso risultato applicato al polinomio “ribaltato” $q(x) = (1/a_0)x^n p(x^{-1}) = x^n + (1/a_0) \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i-1} x^i$ fornisce inclusioni per i reciproci degli zeri.

Un'altra localizzazione degli zeri di polinomi deriva dalla seguente osservazione. Siano x_1, \dots, x_n approssimazioni degli zeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ del polinomio $p(x)$ introdotto sopra e si costruisca la matrice $A = D - ue^T$ dove $D = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ è matrice diagonale con elementi diagonali x_1, \dots, x_n , e dove $e^T = (1, \dots, 1)$, $u = (u_i)$,

$$u_i = p(x_i) / \prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j).$$

Allora si può dimostrare che $\det(xI - A) = p(x)$. Il teorema di Gerschgorin applicato ad A fornisce delle stime dell'errore con cui i valori x_i approssimano gli zeri. In particolare, i cerchi di Gerschgorin K_i hanno centro $x_i - u_i$ e raggio $(n-1)|u_i|$ per $i = 1, \dots, n$.

In certe situazioni sono di aiuto trasformazioni per similitudine date da matrici diagonali. Infatti tali trasformazioni non alterano gli autovalori e permettono di scalare i raggi dei cerchi di Gerschgorin. Si consideri ad esempio la matrice tridiagonale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & 100 & 1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & 1 & 101 \end{bmatrix}.$$

I suoi cerchi di Gerschgorin hanno due componenti connesse formate da due cerchi ciascuna. Ma la matrice ottenuta moltiplicando per $\epsilon > 0$ la prima e la terza riga e dividendo per ϵ la prima e la terza colonna, data da

$$D_\epsilon A D_\epsilon^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon & & \\ -\epsilon^{-1} & 100 & \epsilon^{-1} & \\ & -\epsilon & 2 & -\epsilon \\ & & \epsilon^{-1} & 101 \end{bmatrix}, \quad D_\epsilon = \text{diag}(\epsilon, 1, \epsilon, 1),$$

ha il primo cerchio disgiunto dagli altri se $1/48 \leq \epsilon < 1/3$ e quindi si deduce dal secondo teorema di Gerschgorin che A ha due autovalori reali rispettivamente

negli intervalli $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$ e $[2 - 2\epsilon, 2 + 2\epsilon]$. In modo analogo possiamo operare con gli altri due cerchi e trovare delle scalature di righe e colonne che permettano di ottenere cerchi disgiunti centrati in 100 e 101. \square

5 Note storiche

Il primo teorema di Gerschgorin è stato pubblicato nel 1931 nell'articolo *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix* dal matematico bielorusso di origine ebraica Semyon Aranovich Gerschgorin (24 Agosto 1901 - 30 Maggio 1933). Fra il 1946 e il 1948 Brauer, un allievo di Schur, pubblica una raccolta sistematica di teoremi di limitazione degli autovalori, fra i quali quelli noti come secondo e terzo teorema di Gerschgorin e anche la generalizzazione data in termini degli ovali di Cassini.

Il primo teorema di Gerschgorin è stato preceduto da diversi risultati simili. Nel 1881 Levy dimostra che una matrice con elementi diagonali negativi ed elementi rimanenti positivi in cui le somme degli elementi sulle righe sono negative ha determinante non nullo. Hadamard estende questo risultato al caso complesso nel 1898. Successivamente anche Minkovsky dà una estensione di questo risultato.

Risultati di localizzazione più recenti si trovano su numerosi articoli pubblicati su varie riviste. Per una ricerca a riguardo si veda il data base MathSciNet dell'American Mathematical Society (AMS).

6 Esercizi

Esercizio 1 Localizzare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

usando i cerchi di Gerschgorin di A e di A^T .

Esercizio 2 Siano $C = (c_{i,j})$, $D = (d_{i,j})$ matrici $n \times n$ con $n \geq 2$, tali che $c_{i,j} = 1$ se $i - j = 1 \pmod n$, $c_{i,j} = 0$ altrimenti, $d_{i,j} = i$ per $i = j$, $d_{i,j} = 0$ altrimenti. Sia $A(t) = D + tC$, $t \geq 0$.

a) Utilizzando i teoremi di Gerschgorin si diano condizioni sufficienti su t affinché la matrice $A(t)$ abbia autovalori reali.

b) Per $\epsilon \neq 0$ sia $F_\epsilon = (f_{i,j})$ tale che $f_{i,j} = \epsilon c_{i,j}$ per $i \geq j$, $f_{i,j} = \epsilon^{1-n} c_{i,j}$ per $i < j$. Si dimostri che $A(t)$ è simile alla matrice $A_\epsilon(t) = D + tF_\epsilon$ per ogni $\epsilon \neq 0$.

c) Applicando i teoremi di Gerschgorin a $A_\epsilon(t)$ e alla sua trasposta si diano condizioni sufficienti affinché $A(t)$ abbia autovalori reali.

Esercizio 3 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \geq 4$ un intero e $A = (a_{i,j})$ matrice $n \times n$ definita da $a_{i,i} = i\alpha$, per $i = 1, \dots, n$, $a_{i+1,i} = -1$, $a_{i,i+1} = 1$, per $i = 1, \dots, n-1$ e $a_{i,j} = 0$ altrove.

a) Determinare i valori di α per cui i cerchi di Gerschgorin di A sono a due a due disgiunti. Dimostrare che per tali valori di α la matrice A ha autovalori reali.

b) Posto $\alpha = 4$ si calcolino cerchi di inclusione per ciascun autovalore di A col raggio più piccolo possibile. Suggerimento: si applichino i teoremi di Gerschgorin alla matrice $D^{-1}AD$ dove D è una matrice diagonale opportunamente scelta.

c) Valutare nel modo più accurato possibile il valore $\beta > 0$ per cui la matrice A ha autovalori reali per ogni α tale che $|\alpha| \geq \beta$.

Soluzione

La matrice ha la forma seguente

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ -1 & 2\alpha & 1 & & \\ & -1 & 3\alpha & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & n\alpha \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = 0$ la matrice è antisimmetrica e quindi ha autovalori immaginari o nulli. Possiamo assumere per semplicità $\alpha > 0$, infatti se $\alpha < 0$ possiamo considerare la matrice $-A^T$ che rientra nel caso precedente.

L' i -esimo cerchio di Gerschgorin di una matrice $A = (a_{i,j})$ di ordine n ha centro $c_i = a_{i,i}$ e raggio $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$. Nel nostro caso vale

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha, & r_1 &= 1, \\ c_i &= i\alpha, & r_i &= 2, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ c_n &= n\alpha, & r_n &= 1. \end{aligned}$$

a) I cerchi hanno centro reale e il bordo del cerchio i -esimo interseca l'asse reale nei punti $i\alpha + 2$ e $i\alpha - 2$, $i = 2, \dots, n-1$, mentre i bordi del primo e dell'ultimo cerchio intersecano l'asse reale in $\alpha - 1$, $\alpha + 1$ e rispettivamente in $n\alpha - 1$, $n\alpha + 1$. Quindi i cerchi sono disgiunti se e solo se

$$\begin{aligned} \alpha + 1 &< 2\alpha - 2, \\ i\alpha + 2 &< (i+1)\alpha - 2, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ (n-1)\alpha + 2 &< n\alpha - 1. \end{aligned}$$

Dalla prima e dall'ultima relazione si ricava $\alpha > 3$. Dalle rimanenti si ricava $\alpha > 4$. La condizione richiesta è dunque $\alpha > 4$.

Per il secondo teorema di Gerschgorin, se i cerchi sono a due a due disgiunti allora ciascun cerchio contiene un solo autovalore della matrice. Poiché nel nostro caso la matrice è reale, i suoi eventuali autovalori non reali compaiono a

coppie complesse coniugate. Per cui, essendo i centri dei cerchi di Gerschgorin reali, se un cerchio contenesse l'autovalore non reale λ , esso conterrebbe anche l'autovalore coniugato $\bar{\lambda}$. Ciò è assurdo poiché ogni cerchio deve contenere un solo autovalore.

b) Per $\alpha = 4$ il primo cerchio di centro 4 e raggio 1 è disgiunto dagli altri cerchi. Quindi contiene un solo autovalore. È possibile ottenere un raggio di inclusione più piccolo operando nel seguente modo. La matrice ottenuta da A moltiplicando la prima riga per un numero $0 < \epsilon < 1$ e la prima colonna per ϵ^{-1} ha gli stessi autovalori di A . Il raggio del primo cerchio di Gerschgorin diventa ϵ , il raggio del secondo cerchio diventa $1 + \epsilon^{-1}$. Determiniamo per quali valori di ϵ il primo cerchio è ancora disgiunto dai rimanenti. Poiché i raggi degli altri cerchi non sono cambiati si ha la condizione $4 + \epsilon < 8 - \epsilon^{-1} - 1$ che fornisce $\epsilon^2 - 3\epsilon + 1 < 0$ che è verificata per $(3 - \sqrt{5})/2 < \epsilon < (3 + \sqrt{5})/2$. Per cui, finché la disequaglianza è verificata, il cerchio di centro 4 e raggio ϵ contiene un solo autovalore che è reale. Quindi, anche per $\epsilon = (3 - \sqrt{5})/2$ il cerchio di centro 4 e raggio ϵ contiene un solo autovalore. Analogamente si dimostra che il cerchio di centro n e raggio $(3 - \sqrt{5})/2$ contiene un solo autovalore.

Se $2 \leq i \leq n - 1$, moltiplicando la i -esima riga per ϵ e la i -esima colonna per ϵ^{-1} si ottiene una nuova matrice con gli stessi autovalori di A . I cerchi di Gerschgorin della nuova matrice sono gli stessi della matrice A ad esclusione dei tre cerchi di indice $i-1, i, i+1$ che hanno raggi rispettivamente $1 + \epsilon^{-1}, 2\epsilon, 1 + \epsilon^{-1}$. L' i -esimo cerchio è quindi disgiunto dai due contigui se $4(i-1) + 1 + \epsilon^{-1} < 4i - 2\epsilon < 4i + 2\epsilon < 4(i+1) - 1 - \epsilon^{-1}$, cioè

$$\epsilon^{-1} - 3 < 2\epsilon < 3 - \epsilon^{-1}.$$

La doppia disequaglianza è verificata per $1/2 < \epsilon < 1$. Per cui il cerchio di centro $4i$ e raggio ϵ contiene un solo autovalore che è reale per ogni $1/2 < \epsilon < 1$ e quindi anche per $\epsilon = 1/2$.

c) Ripetendo il ragionamento precedente per un valore generico di α si ottiene per il primo cerchio la condizione $\epsilon^2 + \epsilon(1 - \alpha) + 1 < 0$ che ha soluzioni se $\alpha > 3$ o $\alpha < -1$. Analogò risultato vale per l'ultimo cerchio. Se $2 \leq i \leq n - 1$ si ottengono le condizioni

$$1 - \alpha + \epsilon^{-1} < 2\epsilon < \alpha - 1 - \epsilon^{-1}$$

che hanno soluzioni se $\alpha > \sqrt{8} + 1$ oppure $\alpha < -\sqrt{8} + 1$. □

Esercizio 4 Sia $A = (a_{i,j})$ matrice reale tale che $a_{i,j} \leq 0$ se $i \neq j$. Si dimostri che se esiste un vettore $v = (v_i)$, $v_i > 0$ per ogni i , tale che posto $w = (w_i) = Av$ risulta $w_i > 0$ per ogni i , allora tutti gli autovalori di A hanno parte reale positiva.

Si dimostri che vale la stessa proprietà se A è irriducibile e la condizione $w_i > 0$ viene sostituita da $w_i \geq 0$ per ogni i , ed esiste un indice k tale che $w_k > 0$.

Esercizio 5 Sia A_n matrice $n \times n$, $n = 2m$, con $m < 100$, tale che $A_n = \text{diag}(u) + \alpha H$, $\alpha \geq 0$, dove $u = (1, 100, 2, 200, \dots, m, 100m)$, $H = (h_{i,j})$, $h_{i,i+1} = -h_{i+1,i} = 1$, $h_{i,j} = 0$ altrove. Determinare un numero θ tale che per ogni $\alpha \leq \theta$ la matrice A_n ha autovalori reali per ogni n .

Esercizio 6 Sia A la matrice $n \times n$ con elementi $a_{1,i} = -a_{i,1} = 1$, $i = 2, \dots, n$, $a_{1,1} = n^2$, $a_{i,i} = i$, $i = 2, \dots, n$. Dare delle inclusioni più accurate possibili agli autovalori di A , in particolare dire se gli autovalori della matrice sono reali e distinti.

Esercizio 7 Sia A la matrice tridiagonale $n \times n$, con $n \geq 3$, data da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & & & & \\ a & 0 & a & & & \\ & 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1/2 & \ddots & 1/2 \\ & & & & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $a \geq 0$. Si trovino condizioni su a affinché la matrice abbia raggio spettrale minore di 1.

Esercizio 8 Sia i l'unità immaginaria tale che $i^2 = -1$, sia A la matrice $2n \times 2n$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} iD_1 & B \\ \hline C & -iD_2 \end{array} \right]$$

dove D_1 e D_2 sono matrici diagonali di dimensioni $n \times n$ con autovalori reali nell'intervallo $[a, b]$, con $1 < a \leq b$. Inoltre B e C sono matrici complesse tali che $\|B\|_\infty = \|C\|_\infty = 1$.

a) Dimostrare che A è invertibile, ha autovalori con parte reale di modulo al più 1 e nessuno di essi è reale.

b) Dimostrare che A ha autovalori con parte reale di modulo al più $a - \sqrt{a^2 - 1}$ e con parte immaginaria di modulo almeno $\sqrt{a^2 - 1}$ e dare in funzione di a e b limitazioni superiori al raggio spettrale di A il più accurate possibile.

Soluzione. a) Poiché B e C hanno norma infinito 1 la somma dei moduli dei loro elementi su ogni riga è al più 1. Quindi i cerchi di Gerschgorin di A hanno centro ix con $x \in [ia, ib] \cup [-ib, -ia]$, e raggio al più 1. Questi cerchi non intersecano l'asse reale. Applicando il primo teorema di Gerschgorin si ottiene il punto a).

b) Coniugando la matrice A con $\text{diag}(I, \epsilon I)$ si ottiene

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} iD_1 & \epsilon B \\ \epsilon^{-1}C & -iD_2 \end{bmatrix}.$$

Imponiamo che i cerchi con centro con parte immaginaria positiva siano disgiunti da quelli con centro con parte immaginaria negativa. Questo avviene se $a - \epsilon > -a + \epsilon^{-1}$. La condizione diventa quindi

$$\epsilon^2 - 2a\epsilon + 1 < 0$$

che è verificata se $a - \sqrt{a^2 - 1} < \epsilon < a + \sqrt{a^2 - 1} = 1/(a - \sqrt{a^2 - 1})$. Per il secondo teorema di Gerschgorin, per tutti questi valori di ϵ l'unione dei primi n cerchi contiene n autovalori e l'unione dei restanti cerchi contiene n autovalori di A . I raggi dei primi n cerchi sono al più ϵ . Per cui scegliendo $\epsilon = a - \sqrt{a^2 - 1}$ si deduce che l'unione dei primi n cerchi di raggio al più $a - \sqrt{a^2 - 1}$ contiene n autovalori e scegliendo $\epsilon = 1/(a - \sqrt{a^2 - 1})$ si deduce che l'unione del secondo gruppo di n cerchi che hanno raggio al più $a - \sqrt{a^2 - 1}$ contiene n autovalori. Questo implica il punto b). Inoltre, poichè i centri hanno modulo al più b dai teoremi di Gerschgorin segue che il raggio spettrale è al più $b + a - \sqrt{a^2 - 1}$. \square

Esercizio 9 Sia A una matrice $n \times n$ ad elementi complessi. Dimostrare le proprietà seguenti

- Se A è irriducibile e se $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$, e $x_k \neq 0$ è l'unica componente di x di modulo massimo, allora λ appartiene alla parte interna del cerchio di Gerschgorin di centro $a_{k,k}$ e raggio $\sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}|$.
- Se $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{C}^n$, e se inoltre esiste un indice k tale che $x_k \neq 0$ e $y_k \neq 0$ sono componenti di modulo massimo rispettivamente di x e di y , allora $|\lambda - \mu| \leq 2 \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}|$. Sia A irriducibile; dimostrare che la disuguaglianza diventa stretta se x_k è l'unica componente di modulo massimo di x , oppure se y_k è l'unica componente di modulo massimo di y .
- Se A è reale e tutti i cerchi di Gerschgorin di A hanno parti interne a due a due disgiunte, allora A ha tutti autovalori reali.

Soluzione

a) Seguendo la dimostrazione del primo teorema di Gerschgorin si ha $|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| \frac{|x_j|}{|x_k|}$. Poichè A è irriducibile allora esiste almeno un indice h per cui $a_{k,h} \neq 0$. Poichè $|x_k|$ è l'unica componente di modulo massimo vale $|x_h|/|x_k| < 1$ quindi $|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| \frac{|x_j|}{|x_k|} < \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}|$.

b) Dalla dimostrazione del primo teorema di Gerschgorin segue che sia λ che μ appartengono allo stesso cerchio di Gerschgorin per cui $|\lambda - \mu|$ è minore o uguale al diametro del cerchio.

Se inoltre x_k è l'unica componente di modulo massimo di x allora $|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| \frac{|x_j|}{|x_k|}$. Essendo A irriducibile esiste h tale che $a_{k,h} \neq 0$, e poichè $|x_h|/|x_k| < 1$, vale $|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| \frac{|x_j|}{|x_k|} < \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}|$. Si procede analogamente nel caso in cui y_k sia la componente di modulo massimo di y .

c) Si usa un argomento di continuità. Precisamente si considera la matrice

$A(t) = D + t(A - D)$ dove $D = \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$. Se $t \in [0, 1)$ la matrice $A(t)$ ha tutti i cerchi di Gerschgorin a due a due disgiunti. Per cui dalla teoria sappiamo che $A(t)$ ha tutti autovalori $\lambda_i(t)$ reali. Per la continuità degli autovalori si ha che $\lambda_i(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \lambda_i(t)$ e $\lambda_i(1)$ sono gli autovalori di A . Poiché $\lambda_i(t)$ è reale per ogni $t \in [0, 1)$, ed essendo $\lambda_i(t)$ funzione continua di t allora il limite $\lambda_i(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \lambda_i(t)$ è reale. \square

Esercizio 10 a) Sia $n \geq 2$ intero e $m = 2$. Dimostrare che se una matrice $n \times n$ H ha un autovalore λ di molteplicità geometrica m allora λ appartiene ad almeno m cerchi di Gerschgorin di H . Cioè esistono due indici $h \neq k$ tali che $\lambda \in C_k \cap C_h$, dove C_i denota il cerchio di Gerschgorin relativo all' i -esima riga di H .

b) Dimostrare la proprietà del punto a) per m generico. Dire se la proprietà vale per la molteplicità algebrica, dare eventualmente un controesempio.

Soluzione

a) Sia $m = 2$. Per l'autovalore λ esistono allora due autovettori u, v linearmente indipendenti. Sia $|u_k| = \max_i |u_i|$, $|v_h| = \max_i |v_i|$. Se $k \neq h$ allora procedendo come nella dimostrazione del primo teorema di Gerschgorin si deduce che λ appartiene a due cerchi: il k -esimo e l' h -esimo. Se invece $h = k$, posto $t = v_h/u_h$ si ha che $w = v - tu$ è non nullo poiché u e v sono linearmente indipendenti, e inoltre è autovettore essendo combinazione lineare non nulla di due autovettori corrispondenti allo stesso autovalore. Inoltre $w_h = 0$ per cui il $\max_i |w_i|$ viene preso su un indice \hat{k} diverso da h . Quindi, procedendo ancora come nella dimostrazione del primo teorema di Gerschgorin, si deduce che $\lambda \in C_h \cap C_{\hat{k}}$.

b) Se $v^{(1)}, \dots, v^{(m)}$ sono gli autovettori, considero la matrice V le cui righe sono $v^{(i)T}$, $i = 1, \dots, m$. Sia $V = LU\Pi$ la fattorizzazione di V ottenuta applicando l'eliminazione gaussiana col massimo pivot sulle colonne, dove Π è matrice di permutazione. In questo modo le righe di $V\Pi$ sono ancora autovettori di H essendo combinazioni lineari di autovettori, inoltre, poiché gli elementi diagonali di V sono quelli di massimo modulo sulle rispettive righe, si ha che ciascuna riga di $V\Pi^T$ è autovettore con elemento di modulo massimo preso su un indice diversi. Il primo teorema di Gerschgorin completa la dimostrazione.

La matrice companion associata al polinomio $(x + a)^2$, cioè

$$\begin{bmatrix} 0 & -a^2 \\ 1 & -2a \end{bmatrix}$$

è tale che $\lambda = -a$ è autovalore di molteplicità algebrica 2 e geometrica 1. Se $a = 1/2$, solo il secondo cerchio contiene λ . \square

Esercizio 11 a) Sia $n \geq 2$ intero e $b \in \mathbb{R}$. Sia A la matrice tridiagonale $(2n) \times (2n)$ con elementi diagonali $a_{i,i} = ib$, $a_{n+i,n+i} = i(b-1)$, per $i = 1, \dots, n$,

inoltre $a_{i,i+1} = b^2$, $a_{i+1,i} = -b^2$, per $i = 1, \dots, 2n - 1$. Si dimostri che se $0 < b \leq 1/2$ allora A ha n autovalori con parte reale positiva e n autovalori con parte reale negativa.

b) Si diano condizioni sufficienti su b affinché A abbia n autovalori reali positivi.

Soluzione

a) Si applicano i teoremi di Gerschgorin. Si denoti C_i il cerchio di Gerschgorin costruito sulla i -esima riga di A per cui C_1 ha centro b e raggio b^2 , C_i ha centro ib e raggio $2b^2$ per $i = 2, \dots, n$ mentre C_i ha centro $(i-n)(b-1)$ e raggio $2b^2$ per $i = n+1, \dots, 2n-1$ infine C_{2n} ha centro $n(b-1)$ e raggio b^2 .

Se $0 < b \leq 1/2$ risulta $b - b^2 > 0$ e $ib - 2b^2 > 0$ per $i = 2, \dots, n$ per cui i primi n cerchi sono contenuti nel semipiano destro aperto di \mathbb{C} costituito dai numeri complessi con parte reale positiva. Inoltre, poiché $(b-1)(i-n) + 2b^2 \leq 0$ per $i = n+1, \dots, 2n-1$ e $(b-1)n + b^2 < 0$, i cerchi C_{n+1}, \dots, C_{2n} sono contenuti nel semipiano sinistro chiuso di \mathbb{C} costituito dai numeri complessi con parte reale ≤ 0 . Di questi, C_{n+1} è l'unico cerchio che contiene 0 per $b = 1/2$, che inoltre sta sul bordo.

Per il secondo teorema di Gerschgorin, poiché $\cup_{i=1}^n C_i$ è disgiunta da $\cup_{i=n+1}^{2n} C_i$, la matrice A ha n autovalori con parte reale positiva e n autovalori con parte reale ≤ 0 . Se per $b = 1/2$ esistesse un autovalore con parte reale nulla questo starebbe nella frontiera di C_{n+1} e per il terzo teorema di Gerschgorin, visto che la matrice è irriducibile, dovrebbe appartenere alle frontiere di tutti i cerchi. Il che è assurdo.

b) È sufficiente che i primi cerchi siano disgiunti tra loro e che gli altri cerchi siano contenuti nel semipiano sinistro. Infatti la tesi segue dal secondo teorema di Gerschgorin. La condizione $C_i \cap C_{i+1} = \emptyset$ è $ib + 2b^2 < (i+1)b - 2b^2$ per $i = 2, \dots, n$, mentre per $i = 1$ è $b + b^2 < 2b - 2b^2$. Si hanno quindi le condizioni

$$\begin{aligned} 3b^2 - b &< 0 \\ 4b^2 - b &< 0, \end{aligned}$$

che sono verificate per $0 < b < 1/4$. Per questi valori di b i rimanenti cerchi sono ancora contenuti nel semipiano sinistro per cui i rimanenti autovalori hanno parte reale negativa. Per motivi di continuità, gli autovalori rimangono reali anche per $b = 1/4$ e n di questi sono positivi.

Riferimenti bibliografici

- [1] D. Bini, M. Capovani, O. Menchi. Metodi Numerici per l'Algebra Lineare. Zanichelli, Bologna 1988.
- [2] A. Brauer, Limits for the characteristic roots of matrices II, Duke Math. J. 14 (1947) 21-26.
- [3] S. Gerschgorin, Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. 7 (1931), 749-754.

- [4] G. H. Golub, C. F. Van Loan. Matrix Computations. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [5] R. S. Varga, Gershgorin and His Circles, Springer Verlag 2004.