Analisi Matematica 1

Compitino di prova del 22/04/2020

Esercizio 1. Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x\,|y(x)|^{\frac{1}{3}}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

1. non ha soluzioni crescenti, definite su tutto $\mathbb{R}$,
2. ha un'unica soluzione non identicamente nulla, definita su tutto $\mathbb{R}$,
3. ha più di una soluzione crescente,
4. ha solo la soluzione $y(x) = 0$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $|f(x)| \leq 1$ per ogni x e sia $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Allora:

1. F è crescente,
2. F è decrescente,
3. se $F(1) = 0$, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1]$,
4. se $F(1) = 1$, allora $f(x) = 1$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Esercizio 3. Se $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è positiva ed integrabile in senso improprio, allora la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, definita per $x \in [0, +\infty)$, è

1. crescente e Lipschitziana,
2. crescente, continua, ma non necessariamente Lipschitziana,
3. Lipschitziana, ma non necessariamente crescente,
4. crescente, ma non necessariamente continua.

Esercizio 4. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale converge

$$\int_1^\infty \frac{(\log x)^{\alpha^2}}{(x^2 + x - 2)^\alpha (x-1)^2}\,dx.$$

Esercizio 5. Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) = xe^{2x}.$$

Esercizio 6. Giustificando i passaggi e il ragionamento, disegnare qualitativamente tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' = \arctan(y)\,\frac{e^y}{y-2}.$$

SOLUZIONI

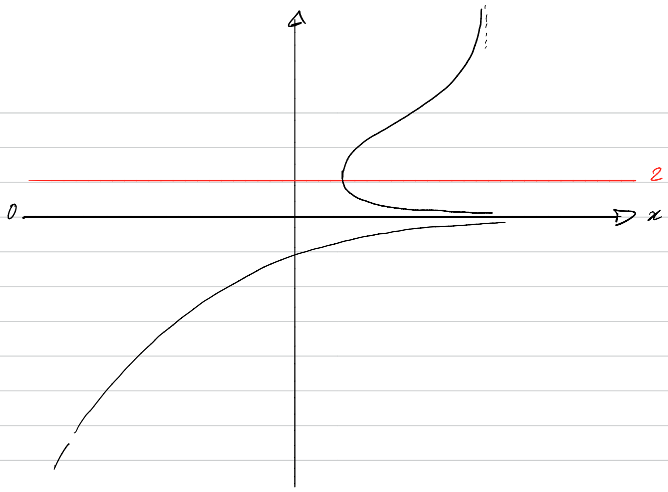
Soluzione 1. Domande a risposta multipla.

- 3.
- 4.
- 2.

Soluzione 2. Domande a risposta breve.

- $\alpha > \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.
- Soluzione dell'omogenea:
$$y_o(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$
Soluzione particolare:
$$\bar{y}(x) = x(\alpha + \beta x)e^{2x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Da cui $\alpha = -\frac{4}{25}$ e $\beta = \frac{1}{10}$.

Soluzione 3. Studio qualitativo.



$$y' = \arctan y \; \frac{e^y}{y-2}$$

DOMINIO: $y \neq 2$

$y' = 0 \iff y = 0$

$\exists !$ LOCALE $\forall$ DATO INIZIALE (x_0, y_0) CON $y_0 \neq 2$

$$y' \geq 0 \iff \frac{\arctan y}{y-2} \geq 0$$

$\iff y \leq 0$ OPP $y \geq 2$

- SE $y_0 > 2$: $\displaystyle\int_{y_0}^{+\infty} \frac{y-2}{\arctan y \; e^y}\, dy$ CONVERGE $\Rightarrow$ ASINTOTI VERTICALI

- SE $y_0 < 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{y_0} \frac{y-2}{\underbrace{\arctan y \; e^y}_{\xrightarrow[y \to -\infty]{} +\infty}}\, dy$ DIVERGE