Compito di Analisi Matematica 1

4 febbraio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n^\alpha}\right)\log\left(n^n\right)$$

al variare del parametro reale $\alpha > 0$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile e tale che

$$\lim_{x\to\to\pm\infty} f'(x) = 0.$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta con un controesempio o con una dimostrazione:

a) f è limitata;

b) f è uniformemente continua.

Esercizio 3. Studiare la convergenza dell'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \log(x)\,(x-1)^\alpha\,dx\,,$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
Calcolare il valore dell'integrale per $\alpha = -3/2$.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1. Ricordando che

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^\alpha}\right) = \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

possiamo riscrivere la serie come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, n \log(n) \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n^{\alpha-1}} + o\left(\frac{\log(n)}{n^{\alpha-1}}\right),$$

da cui segue subito che la serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 2$, mentre non converge se $\alpha \leq 1$ in quanto gli addendi non sono infinitesimi.

Nel caso $\alpha \in (1, 2]$ la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz, che si può applicare poiché la funzione $f(x) = x \log(x) \sin(x^{-\alpha})$ tende a zero per $x \to +\infty$ ed è definitivamente monotona decrescente.

Soluzione esercizio 2.

a) Come mostra l'esempio $f(x) = \log(1 + x^2)$, la funzione f non è necessariamente limitata su $\mathbb{R}$.

b) Per ipotesi esiste $R > 0$ tale che $|f'(x)| \leq 1$ per $|x| \geq R$, cioè la funzione f è lipschitziana e quindi uniformemente continua sugli intervalli $(-\infty, R]$ e $[R, +\infty)$. Poiché f, essendo continua, è anche uniformemente continua sull'intervallo compatto $[-R, R]$, otteniamo che f è uniformemente continua su tutta la retta reale.

Soluzione esercizio 3. Per $x \to 1^+$ la funzione integranda si comporta come $(x-1)^{\alpha+1}$, mentre per $x \to +\infty$ si comporta come $\log(x) x^\alpha$, quindi l'integrale converge se e solo se $\alpha \in (-2, -1)$.

Per $\alpha = -3/2$, integrando per parti e ponendo $t = \sqrt{x-1}$, otteniamo

$$\int_1^{+\infty} \log(x)\,(x-1)^{-\frac{3}{2}}\, dx = 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\, dx = 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = 2\pi\,.$$