Compito di Analisi Matematica 1

30 giugno 2022

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, di classe C^2 su $(0, +\infty)$ e tale che $|f''(x)| \leq 1$ per ogni $x \in (0, +\infty)$.

(1) Dimostrare che f è di classe C^1 su $[0, +\infty)$;
(2) Dimostrare che se $f'(0) = 0$, allora $2|f(x) - f(0)| \leq x^2$ per ogni $x \in [0, +\infty)$;
(3) Mostrare con un controesempio che f in generale non ammette derivata seconda in $x = 0$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale a, si discuta la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_1^\infty (x-1)^a \log(x)^{-\log(x)}\, dx.$$

Esercizio 3. Sia L l'operatore differenziale lineare $Lu := u'' + 2u' + au$, dipendente dal parametro reale a.

(1) Per $a = 1$, scrivere tutte le soluzioni dell'equazione $Lu = xe^{-x}$.
(2) Dire per quali valori di a esistono soluzioni non nulle dell'equazione $Lu = 0$, con condizioni $u(0) = u(1) = 0$.

SOLUZIONI

Soluzione Esercizio 1.

(1) Dimostriamo che f è di classe C^1 su $[0, +\infty)$. Siccome $|f''| \leq 1$ in $(0, +\infty)$, per il Teorema di Lagrange f' è lipschitziana in $(0, +\infty)$. In particolare f' è uniformemente continua in $(0, +\infty)$. Quindi esiste un'unica funzione ϕ continua in $[0, +\infty)$ che estende f'. Mediante il Teorema di Lagrange si dimostra che il limite del rapporto incrementale $(f(x) - f(0))/x$ per $x \to 0^+$ esiste ed è uguale a $\phi(0)$. Quindi f è derivabile in $[0, +\infty)$ con derivata uguale a ϕ.
(2) Applicando la Formula di Taylor col resto di Lagrange si ottiene:

$$f(x) - f(0) = f''(t)\, \frac{x^2}{2},$$

per qualche $t \in (0, x)$. Siccome $f'' \leq 1$ in $(0 + \infty)$ si deduce che $2|f(x) - f(0)| \leq x^2$ per ogni $x \in (0, +\infty)$.

(3) Sia $h(x) := |\sin(1/x)|$ per ogni $x \in (0,+\infty)$. Osserviamo che, per ogni $x \in [0,+\infty)$, l'integrale $g(x) := \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ è ben definito, in quanto l'integranda è una funzione positiva e limitata in $(0,+\infty)$. Dalla limitatezza di h deduciamo inoltre che g è una funzione lipschitziana in $[0,+\infty)$. Osserviamo che per ogni $x \in [0,+\infty)$ l'integrale $f(x) := \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ è ben definito, in quanto l'integranda è una funzione continua in $[0,+\infty)$. Per il Teorema Fondamentale del Calcolo abbiamo che f è di classe C^1 in $[0,+\infty)$ con derivata uguale a g, mentre g è di classe C^1 in $(0,+\infty)$ con derivata uguale a h. In particolare f soddisfa le ipotesi dell'esercizio. Supponiamo per assurdo che il limite del rapporto incrementale $(g(x)-g(0))/x$ per $x \to 0^+$ esista finito. Mediante il Teorema di Lagrange si dimostra che tale limite è uguale al limite di $h(x)$ per $x \to 0^+$, che non esiste. Quindi f' non è derivabile in zero.

Soluzione Esercizio 2. Osserviamo che, per $x > 1$, si ha

$$\log(x)^{-\log(x)} = e^{-\log(x)\,\log(\log(x))} = x^{-\log(\log(x))}.$$

In particolare $(x-1)^a \log(x)^{-\log(x)} = o(x^{-2})$ per $x \to +\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e quindi l'integrale è sempre convergente per $x \to +\infty$.

D'altro canto si ha $\lim_{x\to 1^+} \log(x)\,\log(\log(x)) = 0$ e quindi $\lim_{x\to 1^+} \log(x)^{-\log(x)} = 1$. Di conseguenza l'integrale converge se e solo se $a > -1$.

Soluzione Esercizio 3. Se $a = 1$ il polinomio caratteristico associato a L è

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2,$$

quindi per quanto visto a lezione possiamo cercare una soluzione particolare dell'equazione $u'' + 2u' + au = xe^{-x}$, nella forma $u_0(x) = x^2(ax+b)e^{-x}$, dove i valori di a e b si determinano sostituendo nell'equazione e risolvendo un sistema lineare, ottenendo $a = 1/6$ e $b = 0$. L'insieme di tutte le soluzioni si ottiene sommando alla u così trovata le soluzioni dell'equazione omogenea, ottenendo che

$$u(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + Ax + B\right)e^{-x},$$

con A e B parametri arbitrari.

Il polinomio caratteristico associato all'operatore L è

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + a = (\lambda+1)^2 + a - 1.$$

- Se $a < 1$ il polinomio p ha due radici distinte, e quindi la soluzione generale di $Lu = 0$ sarà del tipo $u(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$; imponendo le condizioni $u(0) = u(1) = 0$ si ottiene il sistema $A + B = 0$ e $Ae^{\lambda_1} + Be^{\lambda_2}$, che ha solo la soluzione nulla.
- Se $a = 1$ le soluzioni di $Lu = 0$ sono del tipo $(Ax+B)e^{-x}$, e imponendo le condizioni $u(0) = u(1) = 0$ otteniamo anche in questo caso che $A = B = 0$.

- Se $a > 1$ la soluzione generale di $Lu = 0$ sarà del tipo $u(x) = e^{-x}(A\cos(x\sqrt{a-1}) + B\sin(x\sqrt{a-1})$; dato che $u(0) = 0$ deduciamo che $A = 0$, quindi se vogliamo anche che $u(1) = 0$ dovrà necessariamente essere $\sin\sqrt{a-1} = 0$ e quindi $a = 1 + k^2\pi^2$ con k intero.