Compitino di Analisi Matematica 1

26 maggio 2022

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione con n zeri distinti.

(1) Mostrare che f' ha almeno $n-1$ zeri distinti.
(2) Mostrare che la funzione $f_c = f' + cf$ ha almeno $n-1$ zeri distinti, per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Siano $x_1 < \ldots < x_n$ gli seri della funzione f. Per il Teorema di Rolle, per ogni $k \in 1, \ldots, n-1$ esiste $y_k \in (x_k, x_{k+1})$ tale che $f'(y_k) = 0$, che dimostra la prima affermazione.

Consideriamo ora la funzione $F(x) = e^{cx} f(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Per il primo punto esistono almeno $n-1$ zeri di $F'(x) = e^{cx} f_c(x)$, che quindi sono anche zeri di $f_c(x)$.

In alternativa possiamo considerare la funzione $g(x) = \log |f(x)| + cx \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\})$, e osserviamo che $\lim_{x \to x_k} g(x) = -\infty$ per ogni $k \in 1, \ldots, n$. Pertanto, per ogni $k \in 1, \ldots, n-1$ esiste $z_k \in (x_k, x_{k+1})$ tale che $g(z_k) = \max_{x \in (x_k, x_{k+1})} g(x)$ e quindi $g'(z_k) = 0$.

Esercizio 2. Discutere la convergenza dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^\beta}{(1+t^2)^2} \left[\sin\left(\frac{1}{1+|t|^{4\alpha}}\right)\right]^2 \left[\cos\left(e^{-|t|}\right)\right]^{2\alpha-1} \mathrm{d}t,$$

al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calcolare l'integrale quando $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$.

Soluzione. Dato che la funzione integranda è pari è sufficiente valutarne l'integrabilità per $t \to +\infty$ e per $t \to 0^+$. Per $t \to +\infty$ la funzione si comporta come $t^{\beta-4}$ se $\alpha < 0$ e $t^{\beta-4-8\alpha}$ se $\alpha \geq 0$, pertanto l'integrale converge se e solo se $\beta < 3 + \max(8\alpha, 0)$. Per $t \to 0^+$ la funzione si comporta come $t^{\beta-8\alpha}$ se $\alpha < 0$ e t^β se $\alpha \geq 0$, pertanto l'integrale converge se e solo se $\beta > -1 + \min(8\alpha, 0)$. In conclusione l'integrale converge se e solo se

$$-1 + \min(8\alpha, 0) < \beta < 3 + \max(8\alpha, 0).$$

Quando $\alpha = 1/2$ e $\beta = 0$, col cambio di variabile $x = 1/(1+t^2)$, l'integrale si riduce a

$$\int_0^1 [\sin(x)]^2 dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2)}{4} = \frac{1 - \sin(1)\cos(1)}{2}.$$

Esercizio 3. Al variare del parametro $\lambda \in (-1, 1)$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 1 + \lambda \cos u \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

(1) Dire se il problema ammette un'unica soluzione e se è definita globalmente.

(2) Mostrare che la soluzione è dispari e tracciarne un grafico qualitativo.
(3) Calcolare l'espressione analitica di u in un intorno dell'origine.
(4) Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x}$.

Soluzione.

La funzione $f(u) = 1 + \lambda \cos u$ è $|\lambda|$-lipschitziana in u in quanto, per il teorema di Lagrange, esiste $\xi \in (u_0, u_1)$ tale che

$$|f(u_1) - f(u_0)| = |\lambda \cos(u_1) - \lambda \cos(u_0)| = |\lambda \sin(\xi)(u_1 - u_0)| \leq |\lambda| \cdot |u_1 - u_0|.$$

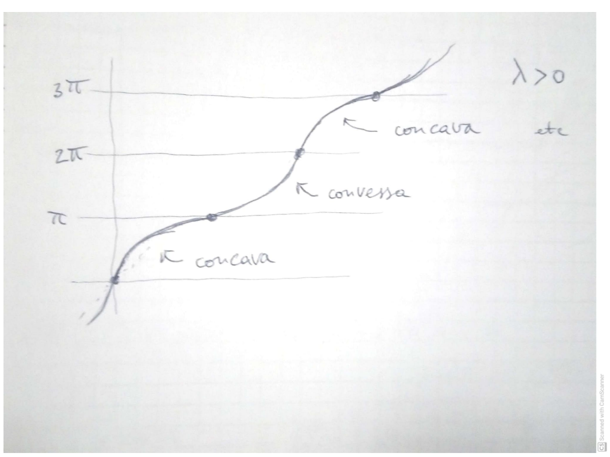
Pertanto sono verificate le ipotesi del Teorema di Cauchy-Lipschitz e la soluzione esiste localmente ed è unica. Ha senso quindi parlare di soluzione massimale, e tale soluzione è definita su tutto R perché $|f(u)| \leq 1 + |\lambda|$ è limitata.

Notiamo inoltre che, se u è soluzione, la funzione v definita da $v(x) = -u(-x)$ soddisfa

$$v'(x) = u'(-x) = 1 + \lambda \cos(u(-x)) = 1 + \lambda \cos(v(x))$$

con $v(0) = 0$. Di conseguenza u e v risolvono il medesimo problema di Cauchy, e quindi per la proprietà di unicità della soluzione del problema di Cauchy, $u = v$.

Si ha che $u' = f(u) \geq 1 - |\lambda| > 0$, quindi u strettamente crescente e $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$. Inoltre $u'' = f'(u)u' = f'(u)f(u) = -\lambda \sin(u) f(u)$; pertanto il segno di u'' e il segno di $\sin(u)$ sono discordi se $\lambda > 0$ e concordi se $\lambda < 0$. Questa informazione ci permette di studiare anche la convessità della soluzione e tracciare un grafico qualitativo.



Trattandosi di un'equazione a variabili separabili, possiamo scriverla come

$$\frac{u'}{1 + \lambda \cos u} = 1.$$

Pertanto, se definiamo

$$\phi(u) := \int_0^u \frac{dy}{1 + \lambda \cos y}, \tag{0.1}$$

otteniamo che $\phi(u(x)) - \phi(u(0)) = x$.

Per calcolare ϕ in un intorno di 0 effettuiamo il cambio di variabile $t = \tan(\frac{y}{2})$, ottenendo

$$\int_0^u \frac{dy}{1+\lambda\cos y} = \int_0^u \frac{2dt}{(1+\lambda)+t^2(1-\lambda)} = \frac{2}{\sqrt{1-\lambda^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} \tan\left(\frac{u}{2}\right)\right).$$

Si noti che ϕ è definita su tutto $\mathbb{R}$, ma l'espressione trovata rappresenta ϕ solo per $|u| < \pi$. Dalla formula trovata sopra deduciamo che, se $|x| < \frac{\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ allora

$$u(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \tan\left(\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2}x\right)\right).$$

Per concludere, osserviamo che la differenza $\phi(u) - \phi(u-2\pi)$ ha derivata nulla, e quindi è costante, e valutando l'espressione in $u = \pi$ otteniamo che tale valore costante è $\phi(\pi) - \phi(-\pi) = 2\phi(\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}$. Da questo segue che, detta $p(u) := \phi(u) - \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}u$ si ha $p(u) - p(u-2\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}} - \frac{2\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}} = 0$, ovvero p è periodica.

Quindi da un lato $\phi(u) = cu + p(u)$, con $c = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ e $p(u)$ funzione periodica, dall'altro $x = \phi(u(x))$. Ne segue che

$$u(x) = \frac{x - p(u(x))}{c},$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x} = \frac{1}{c} = \sqrt{1-\lambda^2}.$$