CONTINUITA'

domenica 12 giugno 2022 19:00

$\boxed{\text{CONTINUITÀ}}$

definizione di f. continua in un p.to

E, F sp. metrici, $x_0 \in E$, $f: E \to F$, f e' continua in x_0 se:

1 x_0 e' p.to isolato
2 x_0 e' di accumul. e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \in F$

$C^0(E) = \{$insieme delle f. continue$\}$ sp. $V/_{\mathbb{R}}$ $\dim(C^0) = \infty$

Def di f. continua in un p.to con ε

sia x_0 del tipo $1 \vee 2$.

f e' continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ per cui se $x \in E$ e' tale che
$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Def di f. continua con intorni

f e' continua in $x_0 \iff \forall V$ int di $f(x_0)$ $\exists U$ int. di x_0 t.c. $f(U) \subseteq V$

def di f. continua in un intervallo

f e' continua in $E' \subseteq E \iff$ f e' continua $\forall x_0 \in E'$

proprietà algebriche

$f, g: E \to \mathbb{R}$ continue in x_0

- $f \pm g$, $f \cdot g$, λf, f/g con $g \neq 0$ $\Rightarrow$ sono continue in x_0

Teorema di Permanenza del segno

$f(x)$ continua in x_0 con $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists U$ int di x_0 t.c $f(x) > 0$ $\forall x \in U$

Composizione di f. continue e sostituzione nei limiti

E, F spazi metrici

$f : E \setminus \{x_0\} \to F$ con x_0 p.to di accum per E

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

$g : F \to G$ continua in y_0

$\Rightarrow$ La funzione composta $g \circ f : E \setminus \{x_0\} \to G$ ha limite in x_0 e si ha che

$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0)$

cioè $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) \overset{y = f(x)}{=} \lim_{y \to y_0} g(y)$

dim

Sia V int. di $g(y_0) \Rightarrow \exists$ U int di y_0 t.c. $g(U) \subseteq V \Rightarrow \exists$ W int di x_0 t.c. $f(W) \subseteq U \Rightarrow$ $(g \circ f)(W) \subseteq V$

corollario

$f : E \to F$ cont. in x_0 $\quad g : F \to G$ cont. in $f(x_0)$

$\Rightarrow g \circ f$ continua in x_0

f. continue con successioni

$f : E \to F$ (E sp. metrico) continua in $x_0 \in E \Leftrightarrow \forall x_n \xrightarrow[n]{} x_0$ si ha che

$\lim_n f(x_n) = f(x_0)$

Non vale in spazi topologici generali

LIPSCHITZIANITA'

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è lip in A se $\exists$ una costante L $L \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x \in A, \forall y \in A$

Osservazione

Se un certo L va bene $\Rightarrow$ vanno bene tutti i successivi

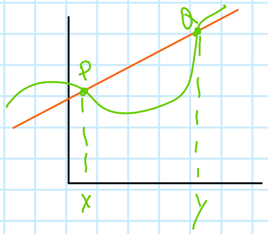
definizione

Se f è lip. in A allora il più piccolo L che va bene si dice costante di lip. di f in A ed è data da $L = \sup\left\{ \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|} \text{ t.c. } x, y \in A \text{ e } x \neq y \right\}$

Interpretazione geometrica

Se f è lip in $A \Rightarrow \left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq L \quad \forall x \neq y$ in A

$\hookrightarrow$ coeff. angolare della retta PQ



Quindi f è lip in $A \iff$ le rette PQ hanno pendenza limitata

La lip mi dice che errore commetto sulle funzioni sapendo l'errore commesso sugli argomenti

def. in Sp. metrici

$f: E \to \mathbb{R}$ $\quad f$ L-Lip. $\iff |f(x) - f(y)| \leq L\, d(x,y)$ con (E,d) sp. metrico

Proposizione

f Lip $\Rightarrow f$ continua

dim

f è Lip $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq L\, d(x, x_0)$

ora $0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq L\, d(x, x_0) = L|x - x_0|$

passo ai limiti per $x \to x_0$: $0 \to 0$, $|f(x)-f(x_0)| \to 0$, $L\,d(x,x_0) \to 0$; per $x \to x_0$ $L|x_0 - x_0| = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ continua in x_0.

definizione di localmente Lip

$f: E \to \mathbb{R}$ è localmente Lip. $\iff \forall a \in E\ \exists U$ int di $a \wedge \exists L > 0$ t.c. $f|_U$ è L-lip

cioè L dipende da a (p.to in cui decido di lavorare) e da U intorno di a.

Proposizione

f loc. Lip $\Rightarrow f$ continua $\qquad f: E \to \mathbb{R}$

dim

Se f è loc. lip $\Rightarrow \forall a \in E\ U$ int di a t.c. $f|_U$ è L-lip

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow f$ continua.

esempio

$f: x \mapsto \sqrt{x}$

1A) f non è Lip su $(0,+\infty)$ e su $[0,+\infty)$ 1B) loc Lip su $[a,+\infty)$
2A) f è loc. Lip su $(0,+\infty)$ 2B) è continua su $[0,+\infty)$

dim

1A) f è L-lip $\Leftrightarrow$ $\overbrace{\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le L \quad \forall x \ne y}^{*}$ * non è soddisfatta perché:

prendo $y=0$ $\quad f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x} \le L \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{x^{1/2}}{x} = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$ non è def. in 0

1B) Però è loc. Lip su $[a,+\infty)$ con $a>0$ con $L = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

perché $\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right| \le L$

$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \le \frac{1}{2\sqrt{a}}|x-y|$ perché $\sqrt{x} < \sqrt{a}$, $\sqrt{y} < \sqrt{a}$ $\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y} < 2\sqrt{a}$

2A) Se $x_0>0$ l'intervallo $[a,+\infty)$ è intorno di x_0 su cui f è L-lip con $a = x_0/2$ $\quad L = \frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$ è loc Lip su $(0,+\infty)$

2B) f è continua in 0.
Sia $\varepsilon>0$ fissato scelgo $\delta = \varepsilon^2 > 0$.
se $x<\delta \Rightarrow |\sqrt{x}-0| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$ cioè $f(B_\delta(0)) \subseteq B_\varepsilon(0)$

nota

(+) ∧ (·) di f. continue è continua
(+) di f. Lip. è Lip ma (·) non è detto

Contrazione

$f: M \to N$ $\quad M, N$ sp. metrici è Lip. di costante $C>0$ se
$d_N(f(x), f(y)) \le C\, d_M(x,y) \quad \forall x,y \in M$

$f: M \to M$ è una contrazione se è Lip con costante $C<1$

Teorema contrazioni

Teorema contrazioni

M sp metrico completo (tutte le succ. di Cauchy convergono)

$f: M \to M$ è una contrazione $\Rightarrow \exists!\ \bar{x} \in M$ t.c. $\underbrace{f(\bar{x}) = \bar{x}}_{\text{p.to fisso per } f}$

Inoltre $\forall x_0 \in M$ la succ. per ricorrenza $x_{n+1} = f(x_n)$ con dato iniziale x_0 converge a $\bar{x}$

dim unicità

Il p.to fisso $\bar{x}$ se $\exists$ è unico.

Infatti se $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ sono p.ti fissi $\Rightarrow d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = d(f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2)) \le \underset{C<1}{C}\, d(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

$\Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2$

dim esistenza

- Fisso $x_0 \in M$ e consideriamo $x_{n+1} = f(x_n)$
- Osserviamo che

  $d(x_{n+1}, x_n) \le C\, d(x_n, x_{n-1}) \le C^n d(x_1, x_0) \quad \forall n$
- Vediamo che x_n è di Cauchy

  $\forall m > n$ si ha $d(x_m, x_n) \overset{\text{dis}\Delta}{\le} \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \le d(x_0, x_1) \sum_{k=n}^{m-1} C^k \le$

  $\le C^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{\infty} C^j = \frac{d(x_0, x_1)}{1-C} C^n \Rightarrow x_n$ è di Cauchy $\Rightarrow x_n \to \bar{x}$
- Per vedere che $\bar{x}$ è p.to fisso passo al limite in $x_{n+1} = f(x_n)$

  osservando che una contrazione è continua $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} = \lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = f(\bar{x})$

DISCONTINUITÀ DI f

definizione e classificazione

$f: E \to \mathbb{R}$ $\quad$ **disc(f)** $= \{ x \in E$ t.c. f non è continua in $x \}$

Sia $x \in \text{disc}(f)$. Allora:

1. f ha una **discontinuità eliminabile** se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

2. f ha una **discontinuità a salto** (**I specie**) se $\exists \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \ell^\pm$ ma $\ell^+ \neq \ell^-$

$f(x) = \text{sgn}(x)$

3. f ha una **discontinuità di II specie** se $\exists \lim_{x \to x_0^\pm} f = \ell^\pm \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell^+ \neq \ell^-$ e almeno uno dei due è $\pm\infty$

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$ e $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$

4. f ha una **discontinuità di III specie** se $\nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o $\nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

ESEMPI VARI

- $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $\Big\}$ III specie, $\text{disc}(f) = \mathbb{R}$ $\quad \nexists \lim$

  ↳ f caratt. di Drichlet

- $f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{se } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ e } (p,q) = 1 \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$\text{disc}(f) = \mathbb{Q}$

$\subseteq$ sia $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ devo vedere che $\lim_{x \to \bar{x}} f = 0$ cioè $\forall N \; \exists \delta$ t.c.

$(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap \{ p/q \text{ t.c. } q \leq N \} = \emptyset \Rightarrow f(x) < \frac{1}{N} \quad \forall x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$

↓ quelli che hanno denom $< N$ sono ins. discreto

$\supseteq$ sempre, tutte le disc sono eliminabili

- $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e discontinua solo su $\mathbb{Q}$

  le disc sono a salto

  $f(x) = \sum_n \frac{1}{2^n} \chi_{(q_n, +\infty)}$ dove $\chi_{(q_n, +\infty)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > q_n \\ 0 & \text{se } x \leq q_n \end{cases}$

  $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ f è crescente, $0 \leq f(x) \leq \sum \frac{1}{2^n} = 1 \quad \forall x \Rightarrow \text{disc}(f) = \mathbb{Q}$

Nota:
Le f. monotone hanno solo disc. a salto.

Proposizione

f monotona $\Rightarrow$ disc(f) e' numerabile

dim

Sia f crescente $f: E \to \mathbb{R}$ e siano $x_1 < x_2$ $x_1, x_2 \in E$

$$\Rightarrow \sum_{x \in disc(f) \cap [x_1, x_2]} [f(x^+) - f(x^-)] \leq f(x_2) - f(x_1) \underbrace{< +\infty}_{*} \Rightarrow disc(f) \cap [x_1, x_2] \text{ e' numerabile}$$

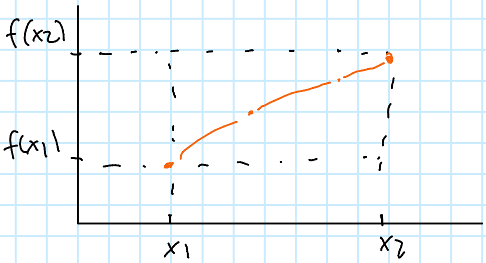
$*$

Spiegazione

essendo la f. monotona ho che le disc(f) sono tutte a salto. Man mano che x cresce conto i salti e conosco l'esatto valore di $f(x) - f(x_1) =$ p.to iniziale

$$0 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1/2} 1+\frac{1}{2} \xrightarrow{1/4} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \quad \dots$$

Le disc. sono numeri positivi cioè $f(x^+) - f(x^-) > 0$
Dunque sto sommando cose positive e affinché la Σ* sia finita deve essere |disc(f)| finito o numerabile
* la Σ è finita perché se così non fosse la mia f sarebbe ∞ cioè uscirebbe fuori dal rettangolino *



* Quindi $\overbrace{\sum f(x^+) - f(x^-)}^{\text{salti di } f}$ è controllato dal f(valore finale) $-$ f(valore iniz)

$$\overset{\shortparallel}{f(x_2)} \quad - \quad f(x_1)$$

Lemma

* Ho usato il fatto che se $\sum_{i \in I} a_i < +\infty$ $a_i > 0$ $\forall i \in I \Rightarrow I$ e' finito o numerabile

dim

$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ dove $I_n = \{ i \text{ t.c. } a_i \geq \frac{1}{n} \}$ e U cresc $\Rightarrow I_n \subseteq I_{n+1}$

$$\frac{1}{n}|I_n| \leq \sum_{i \in I_n} a_i \overset{I_n \subseteq I}{\leq} \sum_{i \in I} a_i < +\infty \Rightarrow |I_n| < +\infty \ \forall n \quad \Rightarrow I \text{ e' numerabile.}$$

Oscillazione di f

$f: E \to \mathbb{R}$ $x_0 \in E$

$$\text{osc}(f)(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \text{ è p.to isolato} \\ \limsup\limits_{x \to x_0}(f) - \liminf\limits_{x \to x_0}(f) \geq 0 & \text{se } x_0 \text{ è p.to di accumul.} \end{cases}$$

Proposizione

$\text{osc}(f)(x_0) > 0 \iff x_0 \in \text{disc}(f)$

nota l'oscill è $0 \iff x_0$ è p.to di continuità

dim

$\text{disc}(f) = \bigcup_n E_n$ dove $E_n = \{x \in \text{disc}(f) \text{ t.c. } \text{osc}(f)(x) \geq \frac{1}{N}\}$

(E_n → chiuso)

$\Rightarrow$ disc(f) è unione numerabile di chiusi

(Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ hanno questa propr)

DOMANDA: $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\text{disc}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

NO, PERCHÉ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ NON SI SCRIVONO COME $\bigcup$ NUM. DI CHIUSI.

INFATTI, SE $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_n E_n$ E_n CHIUSI

AVREI $\text{int}(E_n) \subseteq \text{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ $\forall n$

$\Rightarrow$ AGGIUNGENDO I PUNTI RAZIONALI

AVREI CHE $\mathbb{R} = \bigcup_n F_n$ F_n CHIUSO, $\text{int}(F_n) = \emptyset$.

TEOREMA (BAIRE)

E SP. METRICO COMPLETO,

$F_n \subseteq E$ CHIUSI A PARTE INTERNA VUOTA,

$F = \bigcup_n F_n \Rightarrow \text{int}(F) = \emptyset$

IN PARTICOLARE $F \neq E$

DERIVABILITÀ

Proposizione "Derivata limitata ⇒ f Lip"

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile su I → Intervallo

$|f'(x)| \leq M$ $\forall x \in I \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ $\forall x, y \in I$ cioè f è M-Lip.

UNIFORME CONTINUITÀ

definizione

$f: I \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x, y \in I \ (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

TEO DI HEINE-CANTOR

$f: C \to \mathbb{R}$ continua, $C \subseteq \mathbb{R}$, C CPT, $\Rightarrow$
f è unif. continua cioè $\forall \varepsilon \ \exists \delta$ t.c. $|x-y| \leq \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad x, y \in C$

dim

Per ass $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall \delta_n = \frac{1}{n} \ n \in \mathbb{N} \ \exists x_n, y_n \in C$
t.c. $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$

Dato che C è CPT $\exists n_k$ t.c. $x_{n_k} \to x$ e
$y_{n_k} \to y$ per $k \to +\infty$ con $x = y$

$\Rightarrow \quad \varepsilon \leq \lim_n |f(x_n) - f(y_n)| = |f(x) - f(x)| = 0$ ↯

Proposizione

F Lipschitziana --> f uniformemente continua

es

- $f(x) = x^2$ non è u.c. su $\mathbb{R}$

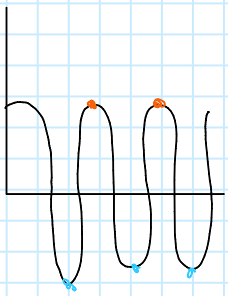
dim
Prendo $x_n = n \quad y_n = n + \frac{1}{n} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ per n grande
$0 \leq f(y_n) - f(x_n) = \cancel{n^2} - \cancel{n^2} + 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$
Trovo punti arbitrariamente vicini tra loro ma la differenza
$f(y) - f(x) \geq 2$ sempre

- $f(x) = \sqrt{x}$ è u.c. su $[0, +\infty)$

- $f(x) = \cos(x^2)$ non è u.c.

dim
$x_n =$ successione dei max $\quad y_n^2 = (2n+1)\pi \quad f(y_n) = -1$
$y_n =$ successione dei min $\quad x_n^2 = 2n\pi \quad f(x_n) = 1$

$|f(x_n) - f(y_n)| \geq 2 \qquad 0 \leq y_n - x_n = \sqrt{(2n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{(2n+1)\pi}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$



Ho esibito due successioni di punti che hanno la proprietà che la loro differenza
È piccola a piacere ma la differenza tra le funzioni è ben lungi dall'essere piccola a piacere.

- $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non è u.c. $\quad x \in (0, 1)$

$(0,1)$ non può essere chiuso per H.C.

Sia y_n t.c. $\frac{1}{y_n} = (2n+1)\pi$ $\quad f(y_n) = -1, f(x_n) = 1$

x_n t.c. $\frac{1}{x_n} = 2n\pi$ $\quad x_n, y_n \to 0$

Non è U.C. per il motivo sopra.

estendibile per continuità

f è estendibile per continuità in un punto x_0 se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Esempio / esercizio

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^{\alpha} \sin(\frac{1}{x})$

1) è U.C. su $(0,1)$

2) è U.C. su $(0,+\infty)$

dim

1). In 1 non ci sono problemi perché f è continua in 1.

- Se $\alpha \leq 0$ f non è U.C. su $(0,1)$ a maggior ragione su $(0,+\infty)$
- Se $\alpha > 0$ f è estendibile per continuità su $[0,1]$

$\{$cioè $\exists$ $\tilde{f}: [0,1] \to \mathbb{R}$ continua t.c. $\tilde{f}|_{(0,1)} = f\}$

Quindi $\overset{\text{Per H.C.}}{\Gamma}$ $\tilde{f}$ è U.C. su $[0,1]$ $\Rightarrow$ f è U.C. su $(0,1)$

2) Per quali $\alpha > 0$ f è U.C. su $(0,+\infty)$ (se $\alpha \leq 0$ non è U.C.)

- Se $\alpha = 1$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ perché $\lim_{x \to +\infty} f(x) \underset{y = 1/x}{\overset{\Downarrow}{=}} \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$

$\Rightarrow$ f è U.C.

- Se $0 < \alpha < 1$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ perché $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ f è U.C.

- Se $\alpha > 1$ $\quad f(x) \sim x^{\alpha - 1}$ $\quad f'(x) = (\alpha - 1)\, x^{\alpha - 2}$

Fatto generale $\to$ $|f'(x)| \leq L$ in I $\Rightarrow$ $f(x)$ è loc Lip $\Rightarrow$ $f(x)$ è U.C.

$f'(x) = \left|(\alpha-1)\frac{x^{\alpha}}{x^2}\right| \leq C \iff \alpha \in (0,2]$

- Se $\alpha > 2$ non è U.C. per velocità di crescita asintotica

Prop. (Buon incollamento) Siano $a < b < c$ e sia $f: [a,c] \to \mathbb{R}$.
Supponiamo f U.C. in $[a,b]$ e $[b,c]$
Allora f è UC in $[a,c]$.

Buon rincollamento (nel nostro caso) → comunque si può facilmente usare per incollare qualsiasi intervallo a patto che abbiano almeno un pto comune

Sia $f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo f U.C. $(0, a]$ e $[a, +\infty)$
$\Rightarrow f$ UC in $(0, +\infty)$

Dim Prendo $\varepsilon > 0$. Allora esistono

- $\delta_1 > 0$: $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x, y \in (0, a]$, $|x-y| \leq \delta_1$
- $\delta_2 > 0$: $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x, y \in [a, +\infty)$, $|x-y| \leq \delta_2$

Dico che $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ va bene dovunque

Prendo $x, y \in (0, +\infty)$, $|x-y| \leq \delta$. Ho tre casi
- $x, y \in (0, a]$ ok
- $x, y \in [a, +\infty)$ ok
- SPG $x \in (0, a]$, $y \in (a, +\infty)$. Allora:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

con $|x-a| \leq \delta_1$, $|x-b| \leq \delta_2$

□

In conclusione $f(x)$ è U.C. su $(0, +\infty) \Leftrightarrow 0 < \alpha \leq 2$

PROPOSIZIONE

1) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = m$ $\quad \ell, m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ è unif. continua

2) Se $f_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è U.C. e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua

t.c. $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - f_0(x)) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - f_0(x)) = 0$

$\Rightarrow f$ è U.C.

dim

$\boxed{1}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists R_+ > 0$ t.c.

$\forall x > R_+ \quad |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = m \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists R_- > 0$ t.c.

$\forall x < R_- \quad |f(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sia $R = \max\{R_-, R_-, 1\}$

Fisso $\varepsilon > 0$. $\delta \in (0, 1)$ viene fuori da u.c. $f|_{[-R-1, R+1]}$

$x, y \in \mathbb{R}$ $\quad |x - y| < \delta$

caso 1 Può succ. che

$x, y > R \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f(x) - \ell + \ell - f(y)|$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

perché sto nella parte in cui $|f - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

caso 2

$x, y < -R \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

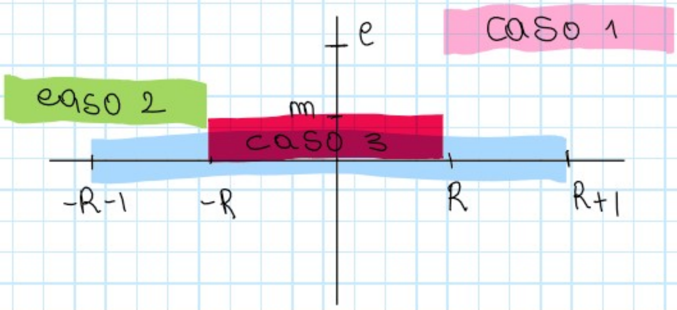
$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - m + m - f(y)|$$
$$\leq |f(x) - m| + |m - f(y)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

caso 3

$x \in [-R, R] \Rightarrow x, y \in [-R-1, R+1]$

$|x - y| < \delta \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

perché $f|_{[-R-1, R+1]}$ è u.c.



In $[-R-1, R+1]$ è u.c per Heine-Cantor

dim $\boxed{2}$

$$f(x) = f_0(x) + \underbrace{f(x) - f_0(x)}_{h(x)}$$

- $h(x)$ è u.c. per p.to $\boxed{1}$ perché $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} h(x) = 0 \in \mathbb{R}$
- $f_0(x)$ u.c. per hp.
- $h(x)$ è u.c. perché somma di f. u.c.

Il teorema [modifica | modifica wikitesto]

Siano (M,d) e (N,ρ) spazi metrici, e $f : M \to N$ una funzione continua su M. Se M è compatto allora f è uniformemente continua.[1]

In particolare, tutte le funzioni reali di variabile reale continue definite su un intervallo chiuso e limitato sono uniformemente continue.

Modulo di continuità

MODULO di CONTINUITÀ (MdC)

$\omega : [0,+\infty] \longrightarrow [0,+\infty]$
- $\omega(0) = 0$
- ω monotona crescente (deb)
- $\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = 0$

$(*)$

$(C \subseteq \mathbb{R})$

DEF. (1) $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$

Dico che ω è un MdC per f se
(i) ω soddisfa $(*)$
(ii) $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x-y|)$

(2) f ammette un MdC se esiste ω che è un MdC per f

Esempi: $\omega_L(t) = L \cdot t$ (con $L > 0$)

$\boxed{\omega_L \text{ MdC per } f \Leftrightarrow f \text{ è } L\text{-Lip}}$

$\omega_{L,\alpha}(t) = L \cdot t^\alpha$ $(\alpha \in (0,1))$ → funz. Hölderiane (p.es $f(x) = \sqrt{x}$)

PROP. $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ le seguenti condizioni sono equivalenti $(C \neq \emptyset)$
(i) f è U.C. (su C)
(ii) f ammette un MdC

Dim: $[\Rightarrow]$ Definisco $\omega_f(t) := \sup\{ |f(x) - f(y)| : x,y \in C, |x-y| \leq t \}$

questo è un MdC per f (anzi è ottimale) → cioè non ∃ una funzione più piccola che svolga lo stesso servizio

- $\omega_f \geq 0$ (basta prendere $x = y \in C$)
- ω_f è monotona per per la monotonia del sup al crescere dell'insieme
- ω_f è infinitesima?

$\boxed{\forall \varepsilon > 0}$ prendo δ dell'U.C. di f e ho che
$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x,y \in C$

Se $t < \delta$ e $|x-y| \leq t \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\omega_f(t) < \varepsilon \quad \forall t < \delta \Rightarrow \lim_{t\to 0} \omega_f(t) = 0$

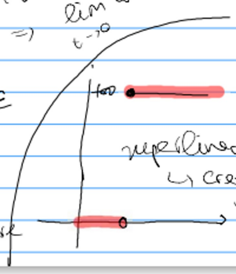
Ovviamente $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x-y|)$ (per costruzione)
$|x-y| = t$

$(\Leftarrow)$ $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x-y|)$

deriva da ω MdC $\lim_{t\to 0} \omega(t) = 0$,

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \omega(t) < \varepsilon \quad \forall t < \delta \Rightarrow$

$t = |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \omega(t) < \varepsilon$



superlineare
↳ cresce più di una retta

esempio

lavorando con i convessi le cose diventano strane

$C = \mathbb{N}$ $\quad f : C \to \mathbb{R}$ $\quad f(n) = n^2$

$\omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1 \\ +\infty & t \geq 1 \end{cases}$

funzione superlineare

I intervallo

PROP: Se $f: I \to \mathbb{R}$ è UC e ω_f è il suo MdC ottimale

Allora ω_f è sub-additivo

$$\omega_f(t+s) \leq \omega_f(t) + \omega_f(s)$$

retta controlla ω_f controlla f

ω crescente positiva, $\omega: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$; ω infinitesima

LEMMA: Se ω è sub-additiva allora $\exists a, b$ t.c.

$$\omega(t) \leq at + b \quad \forall t \geq 0$$

COR: se $f: I \to \mathbb{R}$ è U.C. allora ha crescita sublineare → cioè cresce meno di una retta

Dim: $s, t \geq 0$

$$\omega_f(s+t) = \sup \{ |f(x) - f(y)| : \boxed{|x-y| \leq s+t,\ x,y \in I} \}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \leq \omega_f(t) + \omega_f(s)$$

$z = x - t\, \frac{x-y}{|x-y|}$

$z \in I$ e inoltre

$|x - z| = \left| t \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right| = t \Rightarrow |f(x) - f(z)| \leq \omega_f(t)$

$|z - y| = \left| x - y - t \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right| = \left| \frac{(x-y)}{|x-y|} (|x-y| - t) \right| \leq s$

$\Downarrow$ $|f(z) - f(y)| \leq \omega_f(s)$ subadd.

$|x-y| \leq \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \omega(\delta_0)$

DIM (LEMMA): $\exists \delta_0 : \omega(\delta_0) < 1$

$\omega(n\delta_0) \leq n\,\omega(\delta_0)$ per sub-additività

$|(n+1)\delta_0 - n\delta_0| = \delta_0$

lo fa per trovare t in giusta part

$t \in [0, +\infty[\Rightarrow n\delta_0 \leq t < (n+1)\delta_0 \to n \leq \frac{t}{\delta_0}$

$\omega(n\delta_0) \leq \omega(t) \leq \omega((n+1)\delta_0) \to$ monotonia ω_f

$$\omega(t) \leq (n+1)\,\omega(\delta_0) = n\,\omega(\delta_0) + \omega(\delta_0)$$

$$\leq t \underbrace{\frac{\omega(\delta_0)}{\delta_0}}_{a} + \underbrace{\omega(\delta_0)}_{b}$$

PROP: Se $f: [0,1[\to \mathbb{R}$ è U.C. allora f è estendibile per cont a $[0,1]$

Dim: Basta vedere che $\exists \lim_{x \to 1^-} f(x)$

o.eq. $\exists \ell \in \mathbb{R} : \forall x_n \to 1^- \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

Se $x_n \to 1^-$ $f(x_n)$ è limitata $\Rightarrow$ (a meno di ssucc $\exists \ell$ t.c.) $f(x_n) \to \ell$ per $n \to \infty$

Se $y_n \to 1^-$ è un'altra succ. allora $f(y_n) = f(x_n) + \underbrace{f(y_n) - f(x_n)}_{\varepsilon(n)}$

$$|\varepsilon(n)| \leq \omega_f(|y_n - x_n|) \longrightarrow 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \ell \quad \forall\, y_n$$

OSS: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua (UC), ω è MdC perf

π part. di $[a,b]$

$$S(\pi,f) - s(\pi,f) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \underbrace{\left(f(\xi_k) - f(\eta_k)\right)}^{\omega(|I_k|)} \qquad \xi_k, \eta_k \in I_k$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \underset{\text{lungh. intervallini}}{|I_k|}\ \omega(|I_k|) \leq (b-a)\,\omega(\delta_\pi)$$

se $\delta_\pi = \max\{|I_k|\}$