GRAFICO INTUITIVO DI FUNZIONI ELEMENTARI

lunedì 7 marzo 2022 12:20

FUNZIONI

Capitolo 4 Giusti
Lezioni --> 7-8-9-10 Gobbino

FUNZIONI REALI

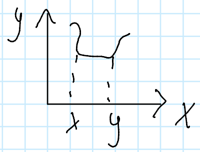
Setting classico $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ $f: A \to \mathbb{R}$

MONOTONIA

- f è strettamente crescente se $y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$
- f è debolmente crescente se $y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$
- f è strettamente decrescente se $y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$
- f è debolmente decrescente se $y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$

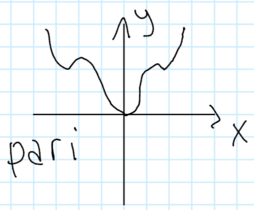
OSSERVAZIONI

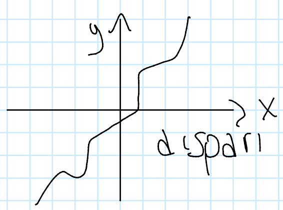
- Se f è strettamente crescente $\Rightarrow$ è pure debolmente crescente
- se f è debolmente crescente ma non strettamente $\Rightarrow$ il grafico ha dei tratti paralleli all'asse x



SIMMETRIA

- f è pari se $f(x) = f(-x)$ $\to$ grafico simmetrico risp all'asse y
- f è dispari se $f(x) = -f(-x)$ $\to$ grafico simmetrico risp. all'origine





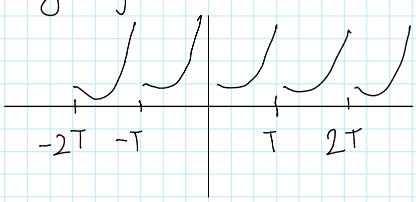
Se f è dispari $\Rightarrow f(0) = 0$

PERIODICITÀ

La funzione f si dice periodica se $\exists\, T > 0$ t.c. $f(x) = f(x+T)$ $\forall x \in A$

T = periodo di f. Se $\exists$ un minimo $T > 0$ che va bene T = minimo periodo

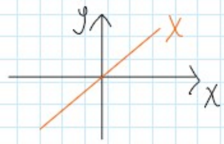
Graficamente vuol dire che il tratto tra 0 e T si ripete



FUNZIONI ELEMENTARI

identità

$f(x) = x$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ • f è dispari e • strett. crescente



• dom = $\mathbb{R}$ • Im(f) = $\mathbb{R}$ ⇒ illimitata

• Continua e derivabile in $\mathbb{R}$

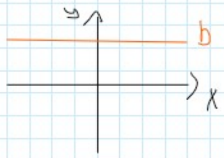
• $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ e • $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

• $f'(x) = 1$

• $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$

costanti

$f(x) = b$



• dom f = $\mathbb{R}$, • Im(f) = b ⇒ limitata

• pari

• continua e derivabile in $\mathbb{R}$

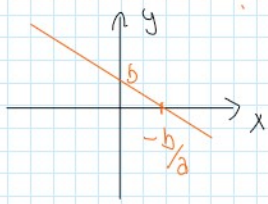
• $\lim_{x \to \pm\infty} b = b$

• $f'(x) = 0$

• $\int b\,dx = bx + c$

lineari

$f(x) = ax - b$



• a è il coeff. angolare della retta
• b è l'ordinata all'origine

• dom f = $\mathbb{R}$

• Se $b=0$ ⇒ f è dispari (rette pass per l'origine)
• Se $b \neq 0$ ⇒ f non è pari né dispari

• illimitata
• monotona → strett. cresc. se $a > 0$
strett. decres se $a < 0$

• continua e derivabile su $\mathbb{R}$

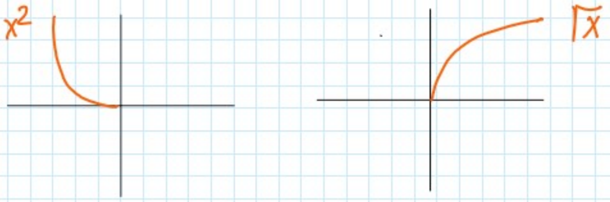
potenze

$f(x) = x^K$ con K intero ≥ 2

- caso K pari $\rightarrow$ $f(x) = x^{2n}$ con $n > 0$ è pari
  - se la considero così: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è né inj né surj
  - se la vedo così: $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è strett. crescente biettiva con inversa $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ t.c. $g(x) = \sqrt[2n]{x}$

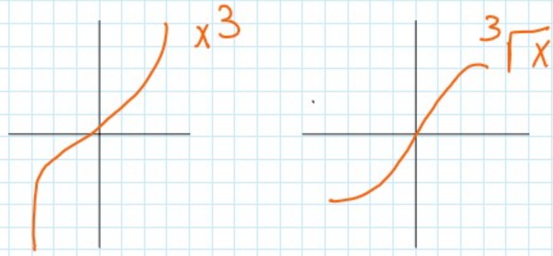
- caso K dispari $\rightarrow$ $f(x) = x^{2n+1}$ $n > 1$ è dispari e strett. crescente su $\mathbb{R}$
  - se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è big con inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt[2n+1]{x}$

caso pari



input $x \geq 0$ output $x \geq 0$

caso dispari



input $\forall x$ output $\forall x$ con lo stesso sgn di partenza

- proprietà delle potenze

a^b con $a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{Q}$ $a > 0$

1. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
2. $(ab)^c = a^c b^c$
3. $a^b > 0$, $a^0 = 1$ $1^b = 1$, $a^1 = a$
4. se $a > 1$ e $b_1 < b_2 \Rightarrow a^{b_1} < a^{b_2}$ ($x \rightarrow a^x$ cresce
5. se $a < 1$ $x \rightarrow a^x$ decrescente.

a^b con $a, b \in \mathbb{R}$

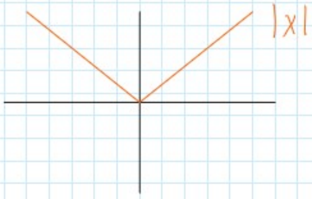
1. se $a > 1$ $a^b = \sup\{a^q \mid q < b, q \in \mathbb{Q}\}$
2. se $a < 1$ $a^b = \inf\{a^q \mid q < b, q \in \mathbb{Q}\}$
3. se $a > 1$ $a^b = \inf\{a^q \mid q > b, q \in \mathbb{Q}\}$
4. se $a < 1$ $a^b = \sup\{a^q \mid q > b, q \in \mathbb{Q}\}$

continuano a valere le prop algebriche.

x^n è inj se n è dispari altrimenti non lo è se n è pari

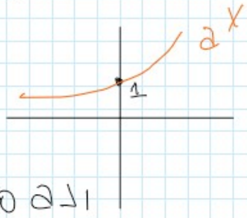
Valore assoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

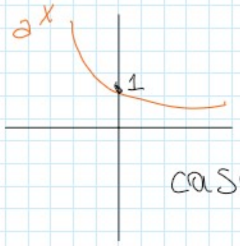


esponenziali

$f(x) = a^x$ con $a > 0$ fissato e x variabile



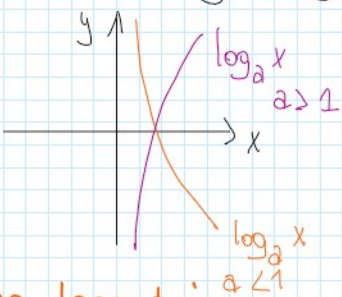
caso $a > 1$



caso $0 < a < 1$

- caso $a > 1$

$f(x) = a^x$ $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è strett. crescente, bigettiva con inversa $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $g(x) = \log_a x$



prop. logaritmi

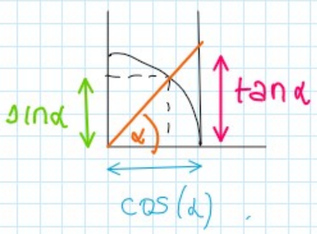
- $\log_a x = y \rightsquigarrow a^y = x$ $a^y > 0 \Rightarrow$ log è def. solo per valori positivi di x, cioè il dominio è $(0, +\infty)$
- $\log_a 1 = 0$
- se $a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x > 0 & \text{se } x > 1 \\ \log_a x < 0 & \text{se } x < 1 \end{cases}$
- se $a < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x > 0 & \text{se } x < 1 \\ \log_a x < 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$
- $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$ $\equiv$ cambio di base
- $\log_a a^x = x \ \forall x \in \mathbb{R}$, $a^{\log_a y} = y \ \forall y > 0$

Operazioni sui grafici

Sia dato il grafico di $f(x)$. Come ottengo il grafico di

- $f(x)+a$ → traslazione verticale se $a>0$
- $f(x+a)$ → trasl. orizzontale se $a<0$
- $-f(x)$ → ribalto rispetto all'asse x
- $f(-x)$ → ribalto rispetto all'asse y
- $-f(-x)$ → ribalto rispetto all'origine
- $|f(x)|$ → ribalto parti negative
- $f(|x|)$ → elimino parte con $x\leq 0$ e la sostituisco con il ribaltato rispetto all'asse y con $x\geq 0$

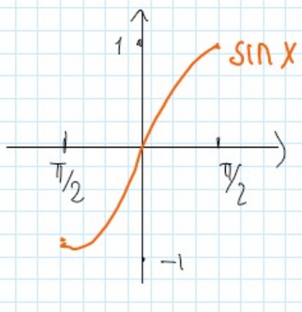
funzioni trigonometriche e loro inverse

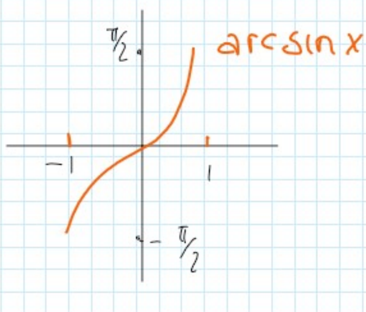


$f(x)=\sin(x)$

- $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è dispari e periodica di periodo minimo 2π
- $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ è strett. crescente e bigettiva con inversa g

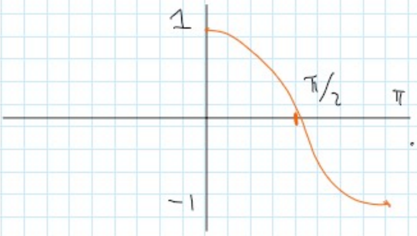
$g: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $g(x) = \arcsin x$ è dispari

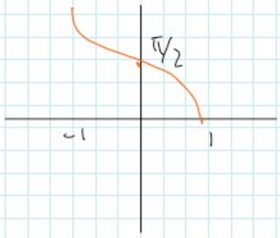




$f(x) = \cos x$

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo 2π, f è pari
- $f: [0, \pi] \to [-1, 1]$ è strett. decrescente e bigettiva con inversa
  $g: [-1, 1] \to [0, \pi]$ $g(x) = \arccos x$

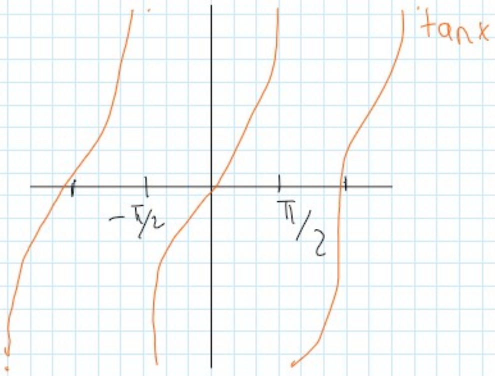


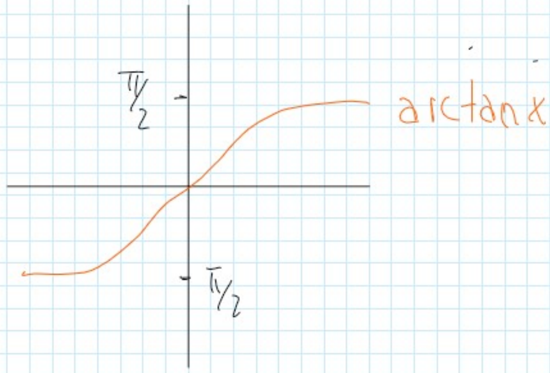


$f(x) = \tan(x)$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = A \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo π, dispari e surgettiva
- $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ è strett. crescente e bigettiva con inversa
  $g(x): \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $g(x) = \arctan x$, g è dispari





$f(x) = \cot g(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$

formule interessanti

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x < 0$$

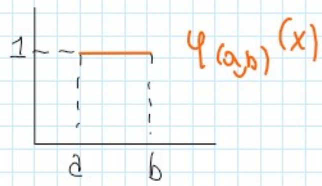
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$y = \arcsin x \Rightarrow \sin y = x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - y = \arccos x \Rightarrow$
$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

La f. caratteristica

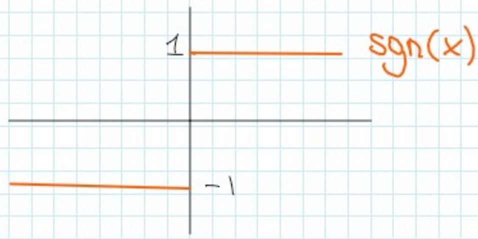
$$\varphi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$



La f. segno

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è dispari

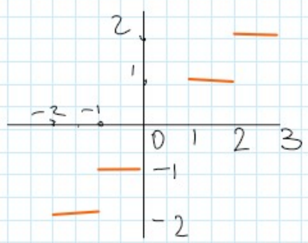


parte intera e parte frazionaria

$\lfloor\ \rfloor$ il più grande intero che non supera x

$\lfloor 3 \rfloor = 3$

$\lfloor 6.5 \rfloor = 6$



$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

$\{2\} = 2 - \lfloor 2 \rfloor = 0$

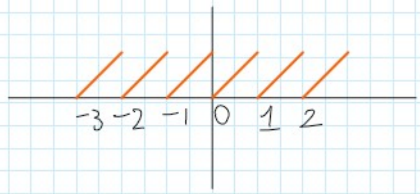
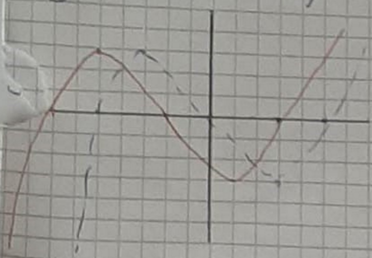
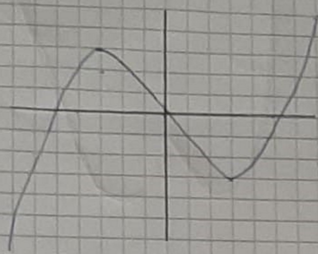


GRAFICO INTUITIUO DI FUNZIONI

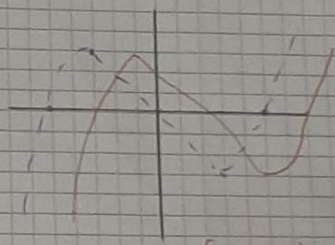
$y = f(x \pm c)$



$f(x+c)$



$y=f(x)$

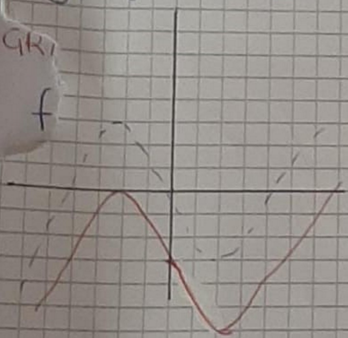


$f(x-c)$

se $c>0$ sposto ⌐ f a sx

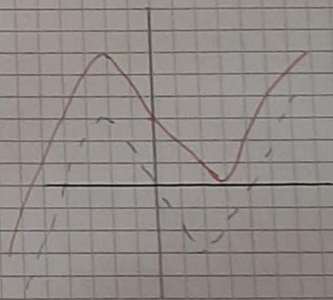
se $c<0$ sposto ⌐ f a dx

$y = f(x) \pm c$



$y=f(x)-c$

$y=f(x)$

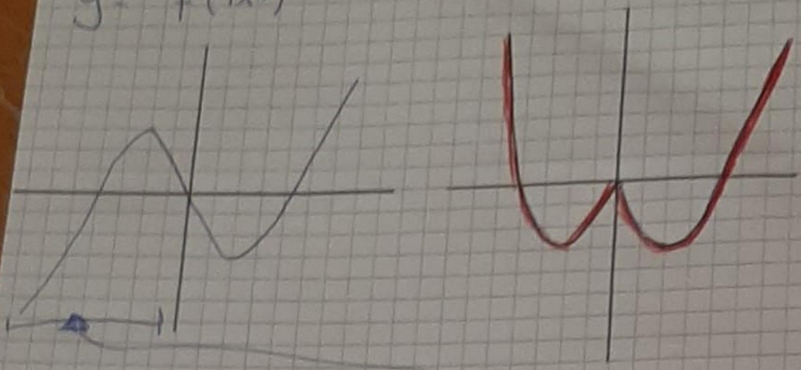


$y=f(x)+c$

se $c>0$ sposto ⌐ f verso l'alto

se $c<0$ sposto ⌐ f verso basso

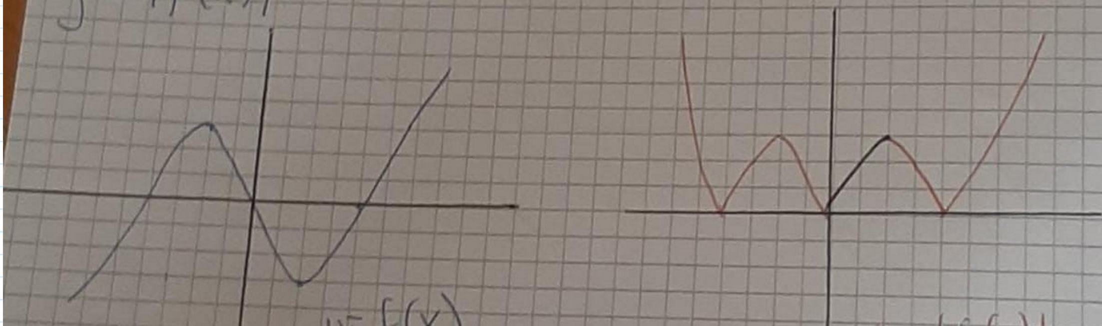
$y = f(|x|)$



$y=f(x)$

elimino la parte delle ascisse negative e costruisco il simmetrico rispetto all'asse y della parte di Γ_f di ascisse positive

$y = |f(x)|$



$y=f(x)$ $y=|f(x)|$

ribalto rispetto all'asse x la pte di grafico che ha ordinate negative

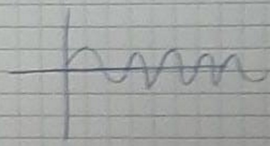
$y = \sin(cx)$ f periodica.

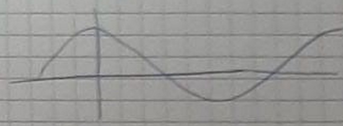
cambia il periodo: il sin si ripete ogni 2π

mentre $\sin(cx)$ ha periodo $\frac{2\pi}{c}$

se $c>1$ si ripete più frequentemente

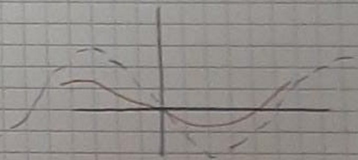
se $c<1$ " " meno " "



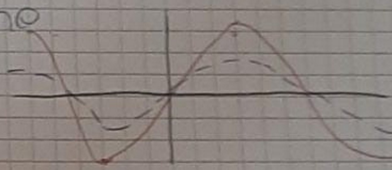


$y = c\sin(x)$

se $c<1$ ho una contrazione

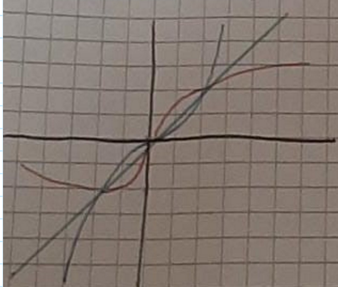


se $c>1$ ho una dilatazione



funzione inversa

si traccia il simmetrico del grafico rispetto alla bisettrice.



- $x = \sqrt[3]{y}$ inversa
- $y = x$ bisettrice
- $y = x^3$

funz. opposta

grafico simmetrico rispetto all'asse x