TOPOLOGIA

giovedì 3 marzo 2022 12:24

TOPOLOGIA

Lezioni --> 8-10-11-12
Capitolo 3 Giusti
Lezioni --> 98 Gobbino

DEFINIZIONE

Distanza e spazio metrico

E insieme, $d: E \times E \to [0, +\infty)$ d è una distanza se:

1. $d(x,x) = 0 \quad \forall x \in E \Rightarrow d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in E \to$ simmetria
3. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \to$ dis. triangolare

(E,d) si chiama spazio metrico.

esempi di spazi metrici

$\mathbb{R} \to d(x,y) = |x-y|$

- $\mathbb{R}^2 \to d(P,Q) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$ con $P = (x,y)$ $Q = (u,v)$
- $\mathbb{R}^3 \to d(P,Q) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}$ con $P = (x,y,z)$ $Q = (u,v,w)$
- $\mathbb{R}^n \to d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$ $y = (y_1, \dots, y_n)$

a) $d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$

b) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \equiv$ norma di x

c) gli elt. di $\mathbb{R}^n$ si chiamano vettori

d) $d(x,y) = \|x-y\|$

e) $(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \equiv$ p. scalare

DEFINIZIONE

Palla e intorno

(E,d) sp. metrico

- $B_r(x) = \{ y \in E \mid d(x,y) < r \} \equiv$ palla di centro x_0 e raggio r
- $A \subseteq E$, $x \in A$ se $\exists\, r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$ allora A è un intorno di x
- se (E,d) è sp. metrico e $E' \subseteq E \Rightarrow (E', d)$ è sp. metrico

DEFINIZIONE

Insiemi aperti e chiusi

- (E,d) sp. metrico $A \subseteq E$ si dice aperto se $\forall x \in A$ $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$ cioè se A è intorno di ogni suo punto
- A si dice chiuso se $A^C = E \setminus A$ è aperto

PROPOSIZIONE

Proprietà degli aperti

Sia $\mathcal{A} = \{ A \subseteq E$ t.c A è aperto$\}$ si ha che:

1. $\emptyset, E \in \mathcal{A}$ cioè $\emptyset$ ed E sono aperti
2. $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ con $\{A_i\}_{i \in I}$ = famiglia di aperti (anche ∞)
3. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ con $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ (non vale per n ∞)

dim

1 per $\emptyset$ è vera a vuoto
per E, essendo l'insieme ambiente $\forall$ palla va bene

2. Sia $x \in \bigcup_{J \in I} A_J \Rightarrow \exists J \in I$ t.c. $x \in A_J \Rightarrow \exists r \mid B_r(x) \subset A_J \subset \bigcup_{J \in I} A_J$
Quindi ogni punto di $\bigcup_{J \in I} A_J$ e' interno $\Rightarrow \bigcup_{J \in I} A_J$ è insieme aperto

3. Se $x \in \bigcap_{J=1}^{n} A_J \Rightarrow x \in A_J \quad \forall J = 1, \dots, n$
Ma $\forall A_J$ e' aperto $\Rightarrow \exists$ $r_J > 0$ tc. $B_{r_J}(x) \subset A_J \quad \forall J = 1, \dots, n$
Sia $\bar{r} = \min r_J$ cioè $B_{\bar{r}}(x) \subset A_J$ dove A_J è il più piccolo aperto
Allora $B_{\bar{r}}(x) \subset A_J \quad \forall J = 1, \dots n \Rightarrow B_{\bar{r}}(x) \subset \bigcap_{J=1}^{n} A_J$
Non vale se n è ∞ per esempio $A_J = \left(-\frac{1}{J}, \frac{1}{J}\right)$ $A_J \in \mathbb{R}$, $J \in \mathbb{N}$
$\bigcap_{J \in \mathbb{N}} A_J = \{0\}$ che è chiuso.

NOTA $\rightarrow$ Ogni chiuso è intersezione di aperti numerabili.

DEFINIZIONE

$\mathcal{Q} = \{ A \subset E \mid A \text{ è aperto} \}$ si dice topologia

- data una metrica è definita una topologia
- A volte metriche $\neq$ definiscono la stessa topologia.

PROPOSIZIONE

Proprietà dei chiusi

1. $\emptyset, E$ sono chiusi
2. $\bigcap_{J \in I} A_J$ è chiusa con A_J chiusi $\forall J \in I$ (anche ∞)
3. Se $A_1, \dots, A_n$ sono chiusi $\Rightarrow \bigcup_{J=1}^{n} A_J$ è chiuso (NO ∞)

dim

1 $\emptyset^C = E$ che è aperto $\Rightarrow \emptyset$ chiuso

$E^C = \emptyset$ che è aperto $\Rightarrow E$ chiuso

2 Sia A_J chiuso $\forall J \Rightarrow A_J^C$ è aperto $\forall J$

$\left(\bigcap_{J \in I} A_J \right)^C = \bigcup A_J^C$

se $x \in \left(\bigcap_{J \in I} A_J \right)^C \Rightarrow x \notin \bigcap_{J \in I} A_J \Rightarrow \exists \bar{J}$ t.c. $x \in A_{\bar{J}}^C \Rightarrow x \in \bigcup A_{\bar{J}}^C$

e $\bigcup A_J$ è aperto perchè è unione di aperti

3. $\left(\bigcup_{J=1}^{n} A_J \right)^C = \bigcap_{J=1}^{n} A_J^C$ questo è aperto perchè è $\cap$ finita di aperti

$\Rightarrow \bigcup_{J=1}^{n} A_J$ è chiusa

DEFINIZIONE

- x è interno ad $A \Leftrightarrow \exists r > 0 \mid B_r(x) \subset A$ $\quad \mathrm{int}(A) = \mathring{A}$
- x è esterno ad $A \Leftrightarrow \exists r > 0 \mid B_r(x) \subset A^C$
- x è sulla frontiera di $A \Leftrightarrow x \notin \mathrm{int}(A) \wedge x \notin \mathrm{int}\, A^C$ $\quad \delta A$
- x è aderente ad $A \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ $\quad \bar{A}$
- x è p.to di accumulazione per $A \Leftrightarrow \forall r > 0 \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ $\quad D(A)$ $\downarrow$ derivato
  o equiv che $B_r(x) \cap A$ ha ∞ elt
- x è p.to isolato $\Leftrightarrow x$ non è di accumulazione $\quad \mathrm{Isol}(A)$

Proprietà

1 A è aperto $\Leftrightarrow$ tutti i suoi punti sono interni
2 $Int(A)$ è un aperto
3 $int(A) \subset A \subset \bar{A}$
4 $\bar{A} = int(A) \cup \delta A \Rightarrow \delta A = \bar{A} \setminus int(A)$
5 $\bar{A} = \{x \in A \mid d(x,A) = 0\}$ con $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$
6 Se A è chiuso $\Rightarrow A = \bar{A}$ e $A = \bigcap\{x \mid d(x,A) < \frac{1}{n}\} = \{x \mid d(x,A) = 0\}$
7 $\bar{A}$ è il più piccolo chiuso $\supset A$
8 Se x è di accum per A $\Rightarrow B_r(x) \supset \infty$ elt. di A diversi da x
9 $\bar{A} = A \cup D(A)$
10 $\bar{A} = D(A) \cup Isol(A)$ e $D(A) \cap Isol(A) = \emptyset$
11 $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
12 A chiuso $\Leftrightarrow A \supset D(A)$
13 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
14 $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

dim

1 $Int(A) = A \Rightarrow$ A è aperto
se A è aperto $\forall x \in A \; \exists r > 0$ t.c $B_r(x) \subseteq A \Rightarrow$ ogni punto di A è interno.

2 Se $x \in Int(A) \Rightarrow B_r(x) \subset A$ per qualche $r > 0$
$B_r(x)$ è aperto $\Rightarrow$ se $y \in B_r(x) \Rightarrow \exists r'$ t.c. $B_{r'}(y) \subset A$
cioè tutti i p.ti della palla continuano a essere aperti
quindi $int(A)$ è aperto

3 $\overbrace{int(A) \subset A}^{1} \overbrace{\subset \bar{A}}^{2}$ è il più grande aperto $\subset$ in A.
① Sia $B \subseteq A$ e B aperto $\Rightarrow a \in B \; \exists r > 0$ t.c $B_r(a) \subset B \subset A$
$\Rightarrow a \in Int(A) \Rightarrow B \subset int(A)$
② $A \subset \bar{A}$
$x \in A \Rightarrow B_r(x) \cap A \supset \{x\} \neq \emptyset$

4) $\bar{A} = int(A) \cup \delta A$

$\subseteq$ $\bar{A} \subset int(A) \cup \delta A$

$x \in \bar{A}$ non può essere esterno $\Rightarrow \bar{A} \supseteq int(A) \cup \delta A$

14) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} \overset{\text{min. chiuso}}{\subset} A \cap B \Rightarrow A \cap B \subset \bar{A}$ e $A \cap B \subset \bar{B} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

13 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\subset$ $\overline{A \cup B} \subset A \cup B \Rightarrow A \cup B \subset \bar{A}$ e $A \cup B \subset \bar{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$

$\supset$ Sia $x_0 \in \bar{A} \cup \bar{B}$ $\forall r > 0$ $\exists B_r(x_0) \cap A \neq 0$ e $B_r(x_0) \cap B \neq 0$

$\Rightarrow \forall r > 0$ $\exists B_r(x_0) \cap (A \cup B) \Rightarrow x_0 \in \overline{A \cup B}$

9 $\bar{A} = A \cup D(A)$ $\boxed{\supset}$ $A \subset \bar{A}$ $\wedge$ $D(A) \subset \bar{A} \Rightarrow A \cup D(A) \subset \bar{A}$

$\boxed{\subset}$ $\bar{A} = A \cup \delta A = A \cup (\delta A \cap D(A)) \subset A \cup D(A)$

$\delta A = (\delta A \cap D(A)) \cup \underbrace{(\delta A \setminus D(A))}_{\text{p.ti isolati}}$

10 A chiuso $\Leftrightarrow A \supset D(A) \rightarrow A = \bar{A} = A \cup D(A)$

PROPOSIZIONE

$A \subseteq \mathbb{R}$ A aperto $\neq \emptyset \Rightarrow$ A è unione di una famiglia numerabile di aperti disgiunti.

dim

Sia $x_0 \in A$ $\quad J_{x_0} = \{ J \subset A \mid x_0 \in J$, con J intervallo aperto $\}$

$J_{x_0} = \bigcup_{J \in J_{x_0}} J$ "int. aperto che contiene x_0

Se $y \in J_{x_0} \Rightarrow J_y \supset J_x \Rightarrow x \in J_y \Rightarrow J_x = J_y$

$J_x \cap J_y \neq 0$

sia $z \in J_x \cap J_y \Rightarrow J_x = J_z = J_y$

$A = \bigcup_{x \in A} J_x = \bigcup_{x \in A \cap \mathbb{R}} J_x$

definizione

- $a \in A$ si dice isolato se $a \notin D(A)$
- A si dice discreto $\Leftrightarrow$ tutti i suoi p.ti sono isolati
- A si dice denso $\Leftrightarrow \bar{A} = E$

(E, d) sp. metrico $\quad A \subseteq E \quad E = int(A) \cup \delta A \cup int(A^c)$