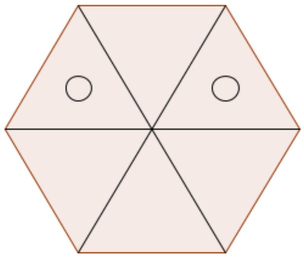
Potete inviare le soluzioni degli esercizi all'email `tutorato.dm.unipi@gmail.com` o mandarci un messaggio alla pagina Facebook Tutorato alla Pari - Unipi. Ricordatevi di indicare il numero del vostro gruppo.

Buon lavoro!

Lezione 1

1. In una pasticceria viene cucinata una torta al cioccolato a forma di esagono regolare, divisa in 6 fette tutte uguali a forma di triangolo equilatero. Inizialmente sulla torta vengono messe esattamente due ciliegie, su due fette distintite, come in figura.



   Lo chef poi prova a fare la seguente cosa: aggiunge 2 ciliegie alla volta in modo che esse siano messe su due fette distinte adiacenti. Il suo obiettivo è continuare ad aggiungerne due alla volta in questo modo, finché tutte le fette non hanno lo stesso numero di ciliegie sopra. Spiegare qual è il numero minimo di aggiunte che deve fare lo chef per riuscire nel suo intento, o dimostrare che non è possibile.

2. Trovare il più piccolo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che valga $3^n > 4n^2 + n + 13$ per ogni $n \geq n_0$.

3. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= 2a_n + 3a_{n-1} \ \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

   Dimostrare che

   - $MCD(a_n, 3) = 1$ per ogni $n \geq 0$.
   - $MCD(a_n, a_{n+1}) = 1$ per ogni $n \geq 0$.

4. Sia F_k il k-esimo numero della successione di Fibonacci, definita come segue:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \quad per\ k \geq 2 \end{cases}$$

   Dimostrare che valgono le seguenti identità:

   - $F_{k+n} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n \quad per\ n \geq 0\ e\ k \geq 1;$
   - $(-1)^k = F_{k+1} F_{k-1} - F_k^2 \quad per\ k \geq 1.$

5. Dimostrare che in ogni riga del triangolo di Tartaglia il numero di coefficienti binomiali dispari è una potenza di 2.