FOGLIO 1 EPS

giovedì 9 marzo 2023 17:40

1) Tiriamo un dado non truccato due volte. Descrivi uno spazio degli esiti Ω e una misura di probabilità P per modellare il risultato di questo esperimento.
Sia A l'evento {il secondo lancio più grande del primo}.
Calcolare la probabilità P(A).

$\Omega_1 =$ Primo lancio dado $= \{1,2,3,4,5,6\}$

$\Omega_2 =$ Secondo lancio dado $= \{1,2,3,4,5,6\}$

$\Omega = \{(\omega_1,\omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$

P è la misura uniforme su Ω $\quad P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \quad \forall \omega \in \Omega \quad P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

Alternativamente

$$P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(A|B_i) P(B_i) = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{6} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Alternativamente

$A_1 = \{$al primo lancio esce $i\}$, $\quad A_2 = \{$al secondo lancio esce $j > i\}$

$$P(A_1) = \frac{1}{|\Omega_1|} = \frac{1}{6}, \quad P(A_2) = \sum_{j=1}^{6} \frac{6-j}{|\Omega_2|} = \frac{1}{|\Omega_2|} \sum_{j=1}^{6} (6-j) = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} 6-j$$

$$P(A) = P(A_1) P(A_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} 6-j$$

es esce 1 al 1° lancio, al 2° lancio vanno bene 2, 3, 4, 5, 6
2 3, 4, 5, 6
⋮ ⋮
6 $\emptyset$

2) In un gioco il giocatore ed il banco lanciano entrambi per 10 volte una moneta equilibrata. Il giocatore vince solo se il numero di teste da lui ottenuto è maggiore strettamente del numero di teste ottenuto dal banco. Qual è la probabilità che il giocatore vinca?

$$\Omega = \{T,C\}^{10} \times \{T,C\}^{10} = \Omega_B \times \Omega_G \qquad \#\Omega_B = 2^{10} = \#\Omega_G \Rightarrow \#\Omega = 2^{20}$$

$A_V =$ A vittoria $= \{\#\text{teste } G > \#\text{teste } B\}$

$A_S =$ A sconfitta $= \{\#\text{teste } G < \#\text{teste } B\}$

$A_P =$ A pareggio $= \{\#\text{teste } G = \#\text{teste } B\}$

$\Omega = A_V \cup A_S \cup A_P$

$P(A_V) = P(A_S)$

$\Rightarrow P(\Omega) = P(A_V) + P(A_S) + P(A_P) = 2P(A_V) + P(A_P)$

$\Rightarrow 1 = 2P(A_V) + P(A_P) \Rightarrow P(A_V) = \frac{1 - P(A_P)}{2}$

$P(A_P) = P\{\#\text{teste } G = \#\text{teste } B\} = P\{G$ faccia K teste, B faccia K teste$\} = P\{\#\text{teste } G = K, \#\text{teste } B = K\} =$

$$= P\{\#\text{teste } G = K\} P\{\#\text{teste } B = K\} = \sum_{K=0}^{10} \frac{1}{2^{10}} \binom{10}{K} \cdot \frac{1}{2^{10}} \binom{10}{K} = \frac{1}{2^{20}} \sum_{K=0}^{10} \binom{10}{K}^2$$

P (fare K teste) equivale ai modi di disporre K elt. su n = 10 $\} = \binom{10}{K} \cdot \frac{1}{2^{10}}$

$$\boxed{P(A_V) = \frac{1 - \frac{1}{2^{20}} \sum_{K=0}^{10} \binom{10}{K}^2}{2}}$$

3. Le n cifre di un numero sono scelte in maniera casuale. Calcolare la probabilità che

(a) non appaia il 3;
(b) non appaiono né il 4 né il 7;
(c) appaia almeno un 5.

Scrivere poi un'espressione per la probabilità che nel numero il 3 appaia prima del 4.

$\Omega_i = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ $\qquad \Omega = \{(\omega_1 \dots \omega_n) \mid \omega_i \in \Omega_i\}$ $\qquad P(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{10^n}$

a $A = \{$non appara il 3$\}$

Considero il mio numero come una stringa numerata $(1\ 2\ 3\ 4\ 5 \dots n)$
Per la cifra 1 ho $(10-1)$ modi di scegliere (dove il -1 indica che ho escluso il 3)
Per la cifra 2 ho $(10-1)$ modi
⋮
Per la cifra n ho $(10-1)$ modi

$\# A = (10-1)(10-1) \dots (10-1) = (10-1)^n = 9^n$

$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \boxed{\frac{9^n}{10^n}}$

b Con lo stesso ragionamento ho che $P(B) = \frac{(10-2)^n}{10^n} = \boxed{\frac{8^n}{10^n}}$

c) $C' =$ non appare il 5. $\qquad P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - P(C')$

$P(C') = \frac{9^n}{10^n} \Rightarrow P(C) = \boxed{1 - \frac{9^n}{10^n}}$

d) P (3 appare prima del 4) $= P$(3 prima del 4, 3 in posizione J)
P (primo 3 in posizione J, nessun 4 prima della posizione J)
P (3 in posizione J, nessun 4 o 3 prima della posizione J) $= D$

$1^a \quad 2^a \dots\dots J-1^a \quad J^a \quad J+1^a \dots\dots n^a$

8 modi, 8 modi, 8 modi, 1 modo di 3, 10 modi, 10 modi

$P(D) = \frac{8^{J-1} \cdot 1 \cdot 10^{n-[(J-1)+1]}}{10^n} = \frac{8^{J-1} \cdot 1 \cdot 10^{n-J}}{10^n}$

geometrica di ragione $a = \frac{8}{10}$ $\quad S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$

$P(\text{3 prima di 4}) = \sum_{J=1}^{n} \frac{8^{J-1}\, 10^{n-J}}{10^n} = \sum_{J=1}^{n} \frac{8^{J-1}}{10^{n-n+J}} = \sum_{J=1}^{n} \frac{8^{J-1}}{10^J} = \frac{1}{10} \sum_{J=1}^{n} \frac{8^{J-1}}{10^{J-1}} = \boxed{\frac{1}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{8}{10}\right)^n}{1-\frac{8}{10}}\right)}$

6) a ABRACADABRA, una per foglietto, e le si pongono in un contenitore. Si estraggono poi, a caso, i foglietti. Qual `e la probabilit`a che le lettere, nell'ordine estratto, diano di nuovo la stessa parola

$n = 11 \quad \# A = 5 \quad \# B = 2 \quad \# R = 2 \quad \# C = 1 \quad \# D = 1$

$P(\text{Evento}) = \frac{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{11!} = \boxed{\frac{5!\,2!\,2!}{11!}}$

4. Si estraggono due numeri a e b da una scatola contenente n palline numerate da 1 a n. Calcolare la probabilità che $|a-b|=1$ nell'ipotesi che le estrazioni vengano effettuate:

(a) senza reinserimento;

(b) con reinserimento.

con reinserimento

$\Omega = \{1, \dots, n\}^2$ opp. $\Omega = \{(a,b) \mid a \in \Omega_1, b \in \Omega_2\}$ $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, \dots, n\}$ $\# \Omega = n^2$

$P\{\text{estrarre } a\} = \frac{1}{|\Omega_1|} = \frac{1}{n}$

$P\{\text{estraggo } b \text{ t.c. } |a-b|=1\}$

$\forall a$ eccetto che $a=1$ e $a=n$ ho 2 possibilità per b cioè $b = a-1 \vee b = a+1$

per $a=1 \Rightarrow b=2$ $(1,2)$

per $a=n \Rightarrow b=n-1$ $(n-1,n)$

$$P\{\text{estraggo } b \text{ t.c. } |a-b|=1\} = P\{(1,2)\} + P\{(n-1,n)\} + P\{\bigcup_{j=2}^{n-1} (j-1, j) \cup (j, j+1)\}$$

$$P\{(1,2)\} = P(a=1)P(b=2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

$$P\{(n-1,n)\} = P(a=n-1)P(b=n) = \frac{1}{n^2}$$

$$P\{\bigcup_{j=2}^{n-1} (j-1, j) \cup (j, j+1)\} = \sum_{j=2}^{n-1} [\underbrace{P(j-1,j)}_{\frac{1}{n^2}} + \underbrace{P(j,j+1)}_{\frac{1}{n^2}}] = \sum_{j=2}^{n-1} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right] = \sum_{j=2}^{n-1} \frac{2}{n^2} = \frac{2}{n^2}(n-1-2+1) = \frac{2}{n^2}(n-2)$$

$$P(Tot) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}(n-2) = \frac{2}{n^2}(1+n-2) = \frac{2}{n^2}(n-1)$$

senza reinserimento

$\Omega = \{(a,b) \text{ t.c. } a \in \Omega_1, b \in \Omega_2\}$ con $\Omega_1 = \{1, \dots, n\}$ $\# \Omega_1 = n$, $\Omega_2 = \Omega_1 \setminus \{a\}$ $\# \Omega_2 = n-1$

$\Omega = \{(i,j) \text{ t.c. } i \in \{1, \dots, i, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}\}$ $\# \Omega = n(n-1)$

$$P\{\text{estraggo } b \text{ t.c. } |a-b|=1\} = P\{(1,2)\} + P\{(n-1,n)\} + P\{\bigcup_{j=2}^{n-1} (j-1, j) \cup (j, j+1)\}$$

$$P\{(1,2)\} = P\{a=1, b=2\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = P\{(n-1,n)\} = P\{(j-1,j)\} = P\{(j,j+1)\}$$

$$P(tot) = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)} + \sum_{j=2}^{n-1}\left[\frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)}\right] = \frac{2}{n(n-1)} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} + \frac{2}{n(n-1)}(n-1-2+1) = \frac{2}{n(n-1)}[1+n-2] = \frac{2}{n\cancel{(n-1)}} \cdot \cancel{(n-1)} = \frac{2}{n}$$

5) Due amici si trovano in coda ad uno sportello della loro banca, insieme ad altre n persone. Assumendo di non avere informazioni sul momento del loro arrivo (cioè assumendo che ogni configurazione delle persone in coda `e ugualmente probabile), calcolare la probabilit`a che siano separati

(a) da esattamente k persone;

(b) da almeno 3 persone.

a) $P_1, \dots, P_n$ persone in fila, a_1 e a_2 amici

$$P(a_1, P_1, \dots, P_k, a_2, P_{k+1}, \dots, P_n) = P(a_2, P_1, \dots, P_k, a_1, P_{k+1}, \dots, P_n) = \frac{n!}{(n+2)!}$$

$$P(\text{distanza tra } a_1 \text{ e } a_2 = k) = P\left(\bigcup_{j=0}^{n-k} (\underbrace{\_\_}_{j}, a_1, \underbrace{\_\_}_{k}, a_2, \_\_) \cup \bigcup_{j=0}^{n-k} (\underbrace{\_\_}_{j}, a_2, \underbrace{\_\_}_{k}, a_1, \_\_)\right) = 2 \sum_{j=0}^{n-k} \{\underbrace{\_\_}_{j}, a_1, \underbrace{\_\_}_{k}, a_2, \_\_\}$$

$$= 2 \sum_{j=0}^{n-k} \frac{n!}{(n+2)!} = 2 \frac{n!}{(n+2)!}(n-k-0+1) = \frac{2\, n!\,(n-k+1)}{(n+2)!} = \frac{2(n-k+1)}{(n+2)(n+1)}$$

b) $1 - P(B^c) = P(B) = 1 - P\{\text{distanza tra } a \text{ e } b < 3\} = 1 - [P(dist=0) + P(dist=1) + P(dist=2)] =$

$$P(dist=0) = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot 2 = \frac{2}{n+2}$$

a_1a_2, a_2a_1

$\frac{n+1}{n+2}$ = # scelte per a_1 / # posti totali

$\frac{1}{n+1}$ = # scelta posto a_2 / # posti tot − quello di a_1

$$P(dist=1) = \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot 2 \qquad P(dist=2) = \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot 2$$

$$P(B) = 1 - \left[\frac{2}{n+2} + \frac{2n}{(n+1)(n+2)} + \frac{2(n-1)}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{(n-2)(n-1)}{(n+2)(n+1)}$$

7) Quattro giocatori sono ad un tavolo da poker. Determinare la probabilit`a che, una volta distribuite le carte (ognuno dei quattro giocatori riceve 5 carte),

(a) il primo giocatore riceva esattamente un asso;
(b) ogni giocatore abbia esattamente un asso.

a) $$\frac{\binom{4}{1}\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}}$$

$\binom{4}{1}$ dare un asso al primo giocatore

$\binom{48}{4} = \binom{52-4}{4}$ = <u>esattamente</u> un asso

cioè tolgo dal mazzo i 4 assi e distribuisco 4 carte al gioc. tanto la 5 carta è l'asso scelto prima

$\binom{52}{5}$ = # modi di distribuire 5 carte da un mazzo di 52

b) $$\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{52-4}{4}\cdot\binom{3}{1}\binom{52-4-4}{4}\cdot\binom{2}{1}\binom{52-4-4-4}{4}\binom{1}{1}\binom{52-4-4-4-4}{4}}{4\binom{52}{5}}$$

FOGLIO 2 EPS

giovedì 9 marzo 2023 17:26

1 Un giocatore lancia due dadi. Se il risultato del lancio del primo dado è 3, qual è la probabilità che la somma dei risultati sia almeno 6? Rispondere a questa domanda facendo uso esplicito della definizione di probabilità condizionata.

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$

$B = \{$esce 3 al 1° lancio$\}$ $\Rightarrow$ $P(B) = \frac{1}{6}$ P è unif.

$A = \{$esce un numero n al 2° lancio t.c. $3 + n \geq 6$ con $n \in \{0, \dots, 6\}\}$

$n = \{3, 4, 5, 6\}$ se $n \in \{1, 2\} \Rightarrow 3 + n < 6$

$P(A) = P(C)$ con $C = \{$esce $3 \vee 4 \vee 5 \vee 6$ al 2° lancio$\}$ $P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

alterm.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \underset{\downarrow}{=} \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$$

A e B sono eventi indipendenti.

2 Due contenitori contengono rispettivamente il primo, 5 palline rosse e 7 nere, il secondo 8 palline rosse e 3 nere. Si sceglie a caso un contenitore e da esso si estraggono due palline, che risultano essere entrambe rosse. Qual è la probabilità che le palline siano state estratte dal primo contenitore

$\Omega = \{(C_1, C_2) \times (R, N)\}$ $C_1 = 5R + 7N$ $C_2 = 8R + 3N$

$P\{C_1 | RR\}$? (senza reimserimento

$$P(RR) \underset{\text{partizione}}{=} P(C_1) \cdot P(RR|C_1) + P(C_2) \cdot P(RR|C_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10}\right) = \frac{109}{165 \cdot 2}$$

$P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{2}$

$$P\{C_1|RR\} \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(RR|C_1) \cdot P(C_1)}{P(RR)} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{165 \cdot \cancel{2}}{109} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{6 \cdot 165}{109 \cdot 11 \cdot 3} = \frac{25}{109}$$

3 Due dadi vengono tirati. Consideriamo i tre seguenti eventi:
A = il primo dado dà un numero dispari,
B = il secondo dado dà un numero pari,
C = la somma dei due risultati è pari.

(a) Dire se i tre eventi A, B, C sono indipendenti.
(b) Dire se sono a due a due indipendenti.

a $\Omega = \{(e_1, e_2) \mid e_1, e_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

$P(A|B)P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$\underset{\frac{1}{4}}{P(A\cap B)} = \underset{\frac{1}{2}}{P(A)} \cdot \underset{\frac{1}{2}}{P(B)}$ sono indip. (b1)

Riformulo C

$C = \underset{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\{\text{entrambi i lanci dispari}\}} + \underset{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\{\text{entrambi i lanci pari}\}}$

$P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(A\cap C) = P(A)\,P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ A e C indip. idem B e C indip.

$= P(C|A)P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$A\cap B\cap C = \emptyset$ per come abbiamo riformulato C

Se per RAA fossero coll. indip. avrei che $P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq 0$ ↯

Quindi non sono coll. indip.

b2) $P(A\cap C) = P(B\cap C)$ per simmetria

$= P(C|A)\cdot P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A)\cdot P(C)$

Quindi sono a due a due indip ma non coll.

4 Sappiamo che il 4% della popolazione è affetto da una certa malattia. Abbiamo a disposizione un test con le seguenti caratteristiche: se la persona è malata, il test è positivo con probabilità pari a 0.95, se la persona è sana, il test è positivo con probabilità pari a 0.15.

(a) Qual è la probabilità che una persona sia malata se è risultata positiva al test?
(b) Qual è la probabilità che una persona sia sana se è risultata negativa al test?

dati

$P(M)=\frac{4}{100}$, $P(T^+|M)=\frac{95}{100}$, $P(T^+|S)=\frac{15}{100}$

a) $P(M|T^+)$ b) $P(S|T^-)$

a) $P(M|T^+) = \frac{P(T^+|M)\cdot P(M)}{P(T^+)} = \frac{\frac{95}{100}\cdot\frac{4}{100}}{0{,}182} = 0{,}208$

Bayes

$P(T^+) = P(T^+|M)P(M) + P(T^+|S)P(S) = \frac{95}{100}\cdot\frac{4}{100} + \frac{15}{100}\cdot\frac{96}{100} = 0{,}182$

$P(S) = 1 - P(S^c) = 1 - P(M) = \frac{96}{100}$

b) $P(S|T^-) = \frac{P(T^-|S)P(S)}{P(T^-)} = \frac{\frac{85}{100}\cdot\frac{96}{100}}{0{,}818} = 0{,}997$

$P(T^-) = 1 - P(T^{-c}) = 1 - P(T^+) = 1 - 0{,}182 = 0{,}818$

$P(T^-|S) = 1 - P(T^+|S) = 1 - \frac{15}{100} = \frac{85}{100}$

per il complem. ⚠ la condizione resta uguale

5 Una coppia ha due figli.
(a) Se almeno uno dei due è maschio, qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?
(b) Se il secondogenito è maschio, qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?

$\Omega = \{MM, MF, FF, FM\}$

a $A_1 = \{$uno dei due figli è maschio$\}$ $\Rightarrow \tilde{\Omega} = \{MM, MF, FM\}$ $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$

b $B_1 = \{$II maschio$\}$ $\tilde{\Omega} = \{FM, MM\}$ $\Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

altern.

b) $\{MM | xM\} = \frac{P(MM \cap xM)}{P(xM)} = 2\cdot P(MM) = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

∩ ⇒ mi dà MM.

a) $\{MM | (xM \cup Mx)\} = \frac{P(MM \cap (xM \cup Mx))}{P(xM \cup Mx)} = \frac{\frac{1}{4}}{3/4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}$

almeno un maschio

(almeno un M)

$1 - P(FF) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

6 Siano A, B, C tre eventi. Consideriamo le due affermazioni
H1 : “A, B sono indipendenti”
H2 : “A, B sono indipendenti condizionatamente a C” (ovvero $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$).

(a) Vale l’implicazione H1 ⇒ H2?
(b) Vale l’implicazione H2 ⇒ H1?
(c) Sotto quali ipotesi su C vale H1 ⇔ H2?

a NO

Trovo controesempio

$\Omega = \{1,2,3,4\}$

$A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{2,3\}$

$P(A) = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{1}{2}$ $\quad P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A\cap B) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A)\cdot P(B) \Rightarrow$ A e B indip

$P(A|C) = \frac{P(\{2\})}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(B|C) = \frac{P(3)}{P(C)} = \frac{1}{2}$

$P(A\cap B | C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)} = 0 \neq P(A|C)\,P(B|C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) No

$\Omega = \{1,2,3,4\}$ $\quad A = \{1,2\}$ $\quad B = \{1,2\}$ $\quad C = \{1\}$

$P(A\cap B|C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)} = \frac{P\{1\}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1 \overset{?}{=} P(A|C)\,P(B|C) = 1$ sì

$P(A|C) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}$, $\quad P(B|C) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}$

ma $P(A\cap B) = P\{1,2\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq P(A)\,P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

c) Se $C \perp\!\!\!\perp A$, $C \perp\!\!\!\perp B$, $C \perp\!\!\!\perp A\cap B \Rightarrow H1 \Leftrightarrow H2$

$P(A\cap B|C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)} \overset{?}{=} P(B|C)\,P(A|C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)}\cdot\frac{P(A\cap C)}{P(C)} \overset{H1}{=} \frac{P(B)\cancel{P(C)}}{\cancel{P(C)}}\cdot\frac{P(A)\cancel{P(C)}}{\cancel{P(C)}}$

$\overset{H2}{=} \frac{P(A)P(B)\cancel{P(C)}}{\cancel{P(C)}}$

7 Mostrare che, se A, B e C sono eventi indipendenti, allora A∩B e C sono eventi indipendenti. Mostrare che il viceversa non vale. Mostrare lo stesso per A ∪ B e C.

$\Rightarrow$ A, B, C indip. $\quad$ Hp.

$P((A\cap B)\cap C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$ $\quad$ tesi

$P((A\cap B)\cap C) = P(A\cap B\cap C) \overset{\text{ind. totale}}{=} P(A)\cdot P(B)\,P(C)$

$\overset{A \perp\!\!\!\perp B}{=} P(A\cap B)\,P(C)$

$\Leftarrow$ Trovare controesempio

$\Omega = \{1,2,3,4\}$ $\quad P(\omega) = \frac{1}{4}$ uniforme

$P(\emptyset\cap\cdot) = P(\emptyset)\cdot P(\cdot)$

$A = \{1\}$ $\quad B = \{2\}$ $\quad C = \{2,3\}$ $\qquad P(A\cap B) = 0$

$P(C)\,P(A\cap B) = 0 = P(A\cap B\cap C)$

$P(A\cap C) = 0 \neq P(A)\cdot P(C) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Unione

$\Rightarrow P((A\cup B)\cap C) = P((A\cap C)\cup(B\cap C)) = P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C)$

$\overset{Hp.}{=} P(C)P(A) + P(B)\cdot P(C) - P(C)\cdot P(A)\cdot P(B) = P(C)\,[P(A)+P(B)-\overbrace{P(A)P(B)}^{P(A\cap B)}]$

$= P(C)\cdot P(A\cup B)$ $\quad$ inclus. esclusione

8 Un mago dice di possedere una moneta magica che alterna perfettamente tra lanci risultanti in testa e croce (se la volta precedente ha dato testa, la prossima volta darà croce e vice versa con probabilità 1). Uno scettico, prima di vedere l'esperimento, pensa che ci sia solo l'1% di probabilità che la moneta abbia questa proprietà, e chiede al mago di convincerlo del contrario. Quanti lanci alternati dovranno essere osservati dallo scettico perché (secondo lui) la probabilità che la moneta abbia la proprietà professata dal mago sia maggiore del 99%?

$A_n = \{n \text{ lanci alternati}\}$ è prob. soggettivistica Bayes $\underbrace{P(A}_{\text{causa}}|\underbrace{B)}_{\text{effetto}} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

$B = \{\text{moneta sia magica}\}$

credenza dello scettico $= \frac{1}{100}$

$\frac{99}{100} \approx P(B|A_n) = \frac{\overbrace{P(A_n|B)}^{1} \cdot P(B)}{P(A_n)}$

f. partizione

$P(A_n|B)P(B) + P(A_n|B^C)P(B^C)$

$P(A_n|B) = 1$, $P(B) = \frac{1}{100}$, $P(A_n|B^C) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2 \cdot 1^{n-1}}{2^n}$, $P(B^C) = \frac{99}{100}$

$0{,}99 \simeq \frac{1 \cdot 0{,}01}{1 + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{0{,}99}{0{,}01}} \Rightarrow n \simeq 1 + \log_2\left(\frac{0{,}99}{0{,}01}\right)^2$

9 Ci sono n contenitori, numerati da 1 a n. Il contenitore k-esimo contiene k palline rosse e n − k palline nere. Si sceglie a caso un contenitore e da questo si estrae una pallina. Qual è la probabilità che la pallina sia rossa? Si eseguono due estrazioni, ognuna con la medesima modalità usata in precedenza. Qual è la probabilità che entrambe le palline siano rosse, se dopo la prima estrazione la pallina estratta viene rimessa nel contenitore da cui era stata estratta? Qual è la probabilità se invece la pallina non viene rimessa?

n contenitori $C_1, -, C_n$ C_K contiene K palline Rosse + $n-K$ blu.

C_1 ha 1 palla rossa e $n-1$ blu.

Ogni contenitore ha n palline

Si sceglie a caso un contenitore $P(C_K) = \frac{1}{n} \ \forall K$

a) $P(R)$?

$P(R) = P(R|C_1)P(C_1) + P(R|C_2)P(C_2) + \dots + P(R|C_n)P(C_n) =$

$= P(C_K)\left[P(R|C_1) + P(R|C_2) + \quad + P(R|C_n)\right] =$

$= P(C_K) \sum_{K=1}^{n} P(R|C_K) = \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{n} \frac{K}{n} \overset{\text{Gauss}}{=} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

$\left(\underset{C_1}{\frac{1}{n}}, \underset{C_2}{\frac{2}{n}}, \underset{C_3}{\frac{3}{n}}, - \underset{C_K}{\frac{K}{n}}, - \underset{C_n}{\frac{n}{n}}\right)$
P(estrarre una palla rossa da C_K)

b) $P(RR)$? con reins.

$P(RR) = \sum_{K=1}^{n} P(RR|C_K)P(C_K) = \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{n} \frac{K^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{K=1}^{n} K^2 \overset{\text{somma } \square}{=} \frac{1}{n^3} \frac{(2n+1)(n)(n+1)}{6}$

$P(C_K) = \frac{1}{n}$ $P(RR|C_K) \overset{\text{con reins.}}{=} \frac{K}{n} \cdot \frac{K}{n}$

senza reins.

$P(RR|C_K) = \frac{K}{n} \cdot \frac{K-1}{n-1}$

$P(RR) = P(C_K) \sum_{K=1}^{n} P(RR|C_K) = \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{n} \frac{K(K-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{(n-1)} \sum_{K=1}^{n} K(K-1)$

FOGLIO 3 EPS

1) In un contenitore ci sono 100 palline numerate da 1 a 100. Le estraiamo una dopo l'altra senza reinserimento.

(a) Qual è la probabilità di ottenere nelle prime 10 estrazioni solo numeri ≤ 75?
(b) Qual è la probabilità che le prime 15 palline estratte portino tutte un numero dispari?

(a) Intuitivamente chiamo $A_i = \{$esce un $n \leq 75$ alla i-esima estrazione$\}$

$P(A_1) = \frac{75}{100}$

$P(A_2) = \frac{74}{99}$

$\vdots$

$P(A_{10}) = \frac{66}{85}$

$P(A) = \prod_{i=0}^{9} \left(\frac{75-i}{100-i} \right) =$

Altermativamente

$\Omega = \{ S \in \{1, \dots, 100\}$ tc. $|S| = 10 \}$ $\quad |\Omega| = \binom{100}{10}$ = modi di scegliere 10 elt. distinti da un insieme di 10 elt.

$$P(A) = \frac{\binom{75}{10}}{|\Omega|} = \frac{\binom{75}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{\frac{75!}{65!}}{\frac{100!}{90!}}$$

(b) Intuitivamente chiamo $A_i = \{$esce un n dispari alla i-esima estrazione$\}$

$P(A_1) = \frac{50}{100}$

$P(A_2) = \frac{49}{99}$

$\vdots$

$P(A_{15}) = \frac{36}{86}$

I numeri dispari sono 50 $\Rightarrow \prod_{i=0}^{14} \left(\frac{50-i}{100-i} \right) = P(B)$

Altermativ.

$\Omega = \{ S \subset \{1, \dots, 100\}$ tc. $|S| = 15 \}$

numeri dispari = 50

$$P(A) = \prod P(A_i) = \frac{\binom{50}{15}}{\binom{100}{15}} = \frac{\frac{50!}{36!}}{\frac{100!}{85!}}$$

2) Una moneta viene lanciata 2n volte. Sia tn la probabilità che il numero di teste sia maggiore del numero di croci, e un la probabilità che il numero di teste sia pari al numero di croci.

(a) Calcolare il limite di un per n → +∞.

(b) Determinare il limite di tn .

Posso riformulare il problema nel seguente modo:

(a) A = Il n° di teste = successi in una sequenza di 2n prove è una binomiale $\Rightarrow \boxed{p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$

In questo caso $p = \frac{1}{2}$, $1-p = \frac{1}{2}$

$$P\{\#T = \#C\} = u_n = \binom{2n}{n} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{p} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n}}_{1-p} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\stackrel{=}{} \frac{(2n)!}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} = \frac{1}{\cancel{2^{2n}}} \frac{\sqrt{4\pi n} \cdot \cancel{2^{2n}}}{2\pi n} = \frac{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}}{2\pi n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \to 0$$

Stirling $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

(b) $t_n = \{\#T > \#C\}$

$$\Omega = \underbrace{\{\#T > \#C\}}_{A} + \underbrace{\{\#T < \#C\}}_{B} + \underbrace{\{\#T = \#C\}}_{C}$$

$1 = P(\Omega) = \underbrace{P(A)}_{t_n} + \underbrace{P(B)}_{t_n} + \underbrace{P(C)}_{u_n}$ $\qquad P(A) = P(B)$ $\qquad P\{\text{esce } T\} = \frac{1}{2} = P\{\text{esce croce}\}$

$$1 = 2t_n + u_n \Rightarrow t_n = \frac{1-u_n}{2} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\pi n}}}{2} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{2}$$

3) Il numero di telefonate X che arrivano ad una segreteria telefonica di un ufficio ogni 9 minuti `e distribuito X ~ Pois(6). Calcolare

(a) la probabilità che arrivino almeno 5 chiamate in 9 minuti;

(b) la probabilità che non arrivi nessuna chiamata tra le ore 9:00 e le ore 9:09

(b) In generale si ha che $\boxed{p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$

$\lambda = 6$ $\qquad P(B) = \frac{6^0}{0!} e^{-6} = \frac{1}{e^6}$ prob. che non arrivi nessuno

(a) $P(A) = 1 - \left(P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)\right)$

$$1 - \left(\frac{1}{e^6} + \frac{6}{1!}e^{-6} + \frac{6^2}{2!}e^{-6} + \frac{6^3}{3!}e^{-6} + \frac{6^4}{4!}e^{-6}\right)$$

5) Consideriamo un esperimento a prove ripetute indipendenti con probabilità di successo p. Determinare la probabilità che

(a) il primo successo avvenga alla prova k;
(b) il primo successo avvenga dopo almeno k prove;
(c) il primo successo avvenga prima della (k + 1)-esima prova
(d) il primo successo avvenga in una prova dispari;
(e) il primo successo non avvenga mai

a) è la distrib. geometrica $G(p)$ con $p(K) = (1-p)^{K-1} p$

infatti primo successo alla prova K-esima = insuccesso nelle prove da 1 a K-1

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{K-1}, \underbrace{1}_{K}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-K})$$

$$K-1 \to (1-p)^{K-1} \qquad K \to p$$

b) dopo almeno K-prove $= 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + \ldots + P(K-1) + P(K)]$ ← sugg. complementare

$= 1 - P\{\overbrace{\text{successo avvenga nella prova } J \le K}^{A_J}\}$

$P(J)$ = successo alla J-esima prova

$= 1 - P(A_J)$

$$P(A_J) = (1-p)^{J-1} p$$

$$P(B) = 1 - \sum_{J=1}^{K} P(A_J) = 1 - \sum_{J=1}^{K} (1-p)^{J-1} p = 1 - p \sum_{J=1}^{K} (1-p)^{J-1} = 1 - p \sum_{h=0}^{K-1} t^h =$$

$t = 1-p$, $h = J-1$; $\quad J = 1 \Rightarrow h = 0$; $\quad J = K \Rightarrow h = K-1 \Rightarrow K = h+1$

$$1 - p\left(\frac{1-t^{h+1}}{1-t}\right) = 1 - \cancel{p}\,\frac{1-(1-p)^{h+1}}{\cancel{1}-\cancel{1}+\cancel{p}} = 1 - 1 + (1-p)^{h+1} = (1-p)^{K-1+1} = (1-p)^K$$

c) 1° successo prima della K+1-esima prova = C

$P(C) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_K)$ con A_i = succ. alla i-es. prova

$$P(A_i) = (1-p)^{i-1} p$$

$$P(C) = \sum_{i=1}^{K} (1-p)^{i-1} p = p \sum_{i=1}^{K} (1-p)^{i-1} = p \sum_{h=0}^{K-1} t^h = p \cdot \frac{1-t^{K-1+1}}{1-t} = \cancel{p}\,\frac{1-(1-p)^{K=h+1}}{\cancel{1}-(\cancel{1}-\cancel{p})} =$$

$t = 1-p$, $h = i-1$

$$1 - (1-p)^{h+1=i} = 1 - (1-p)^i$$

d) il 1° succ. avvenga in una prova dispari

1ª	2ª	3ª	4ª
si	no	si	no

$$P(D) = \underset{= p}{P(A_1)} + \underset{= (1-p)^2 p}{P(A_3)} + \underset{= (1-p)^4 p}{P(A_5)} + \ldots + \underset{= (1-p)^8 p}{P(A_9)} \text{ etc,}$$

$$P(D) = \sum_{i=0}^{\infty} p\,(1-p)^{2i} = p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{2i} = p \sum_{i=0}^{\infty} [(1-p)^2]^i = p\,\frac{1}{1-(1-p)^2} =$$

$$p\,\frac{1}{1-(1+p^2-2p)} = \cancel{p}\,\frac{1}{-\cancel{p}(p-2)} = \frac{1}{2-p}$$

e) il 1° succ. non avvenga mai

$$(1-p)^n, \quad \lim_{n \to +\infty} (1-p)^n = 0$$

6) Un generatore di numeri casuali produce una successione di terne (i, j, k), con $i, j, k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Indichiamo con S l'evento "esce un tris" (ovvero una terna costituita da cifre tutte uguali). Calcolare la probabilit`a dei seguenti eventi:
(a) tra le prime 10 terne prodotte ci sono almeno due tris
(b) si devono produrre almeno 10 terne per ottenere due tris
(c) si devono produrre esattamente 40 terne per avere 3 tris (ovvero il terzo tris si ha esattamente alla 40-esima terna prodotta).

a)

$\Omega = \{(i,j,k) \mid i,j,k \in \{0,\dots,9\}\}$ $\quad \#\Omega = 10^3$

$P\{\text{esce un tris}\} = \frac{10}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10^2}$

$A_i = \{\text{esce un tris alla } i\text{-esima estrazione}\}$

$P\{\overbrace{\text{escano } K \text{ tris tra le prime 10 estrazioni con } K \geq 2}^{A}\} =$

$= 1 - P\{\text{escano 0 tris oppure 1 tris tra le prime 10 estr}\}$

$= 1 - P\{\text{0 successi tra le prime 10 prove} \cup \text{1 successo tra le prime 10 prove}\}$

$P\{\text{1 successo su 10 estrazioni}\} = \binom{10}{1} p^1 (1-p)^{10-1} = 10 \cdot \frac{1}{10^2}\left(\frac{99}{100}\right)^9 = \frac{1}{10}\left(\frac{99}{100}\right)^9$

$\sim Bin(10, p)$ $\quad p = \frac{1}{10^2}$

$P\{\text{0 successi su 10 estrazioni}\} = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10-0} = 1 \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)^{10} = \left(\frac{99}{100}\right)^{10}$

Quindi $P(A) = 1 - \left[\frac{1}{10}\left(\frac{99}{100}\right)^9 + \left(\frac{99}{100}\right)^{10}\right] = 1 - \left[\left(\frac{99}{100}\right)^9 \left(\frac{1}{10} + \frac{99}{100}\right)\right]$

b $P(B) = P\{\text{di produrre almeno 10 terne per 2 tris}\}$

$= 1 - P\{\text{produrre 9 terne per almeno 2 tris} + \text{8 terne per almeno 2 tris} + \text{7 terne per almeno 2 tris} + \_\_\_ + \text{2 terne per almeno 2 tris}\} =$

$1 - \left[9 \cdot \frac{1}{10^2}\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)^8 + \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)^9 \dots\right]$

$= 1 - \sum_{i=2}^{9} 1 - \left[i \frac{1}{10^2}\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)^{i-1} + \left(1 - \frac{1}{10}\right)^i\right]$

c) 40 terne per 3 tris, il 3° alla 40°

$Z = \#$ terne prodotte al 3 tris $\sim BinNeg(m, p)$

$P(Z_m = k) = P_m(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}$

$P(Z_3 = 40) = P_3(40) = \binom{40-1}{3-1}\left(\frac{1}{10^2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)^{37}$

7) Un collezionista ha già raccolto 60 delle 100 figurine di un album. Egli acquista una busta contenente 24 figurine (tutte diverse), tra le quali naturalmente ve ne possono essere alcune che egli già possiede.
Qual 'e la probabilit`a che tra le figurine appena comprate ve ne siano almeno 20 che già possiede?

$A_i = \{\text{nella bustina ci sono } i \text{ figurine che già ha}\}$

$P(A_{20}) + P(A_{21}) + P(A_{22}) + P(A_{23}) + P(A_{24}) = \sum_{i=20}^{24} P(A_i)$

$\binom{100}{24} = \#$ modi di avere 24 figurine in una bustina

$\binom{60}{j} = \#$ modi di scegliere j figurine tra quelle che già ha

$\binom{40}{24-j} =$ " " le rest. figurine tra quelle che non ha

$$P(A) = \sum_{j=20}^{24} \frac{\binom{60}{j}\binom{40}{24-j}}{\binom{100}{24}}$$

8) Siano dati due esperimenti a prove ripetute indipendenti con probabilit`a di successo rispettivamente p1 e p2 che siano indipendenti tra loro.

(a) Qual `e la probabilit`a che il primo successo del primo esperimento avvenga prima del primo successo del secondo?
(b) Assumiamo ora che vengano fatte 5 prove per esperimento. Calcolare la probabilit`a che il numero di successi nel primo gruppo sia maggiore o uguale al numero di successi nel secondo.

a) A_1: 1° successo del 1 esperimento $\sim G(p_1)$

A_2: 1° successo del 2 esperimento $\sim G(p_2)$

$P(\underbrace{G(p_1)}_{p_1(1-p_1)^{k-1}} < \underbrace{G(p_2)}_{p_2(1-p_2)^{h-1}})$ voglio $h > k$

P(A_1 avvenga nella K-esima prova, A_2 non avvenga nelle prove prima della K, compresa K)

$= (1-p_1)^{k-1} p_1 (1-p_2)^k$

$p_1 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^k = p_1 \sum (1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}(1-p_2) = p_1(1-p_2)\sum_{k=1}^{\infty}[(1-p_1)(1-p_2)]^{k-1} = p_1(1-p_2)\sum_{h=0}^{\infty}[(1-p_1)(1-p_2)]^h =$ $h = k-1$

$p_1(1-p_2)\frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$

b) $B = \{\underbrace{n° \text{ successi del primo esp}}_{Bin(5,p_1)} \geq \underbrace{n° \text{ succ. del 2 esper.}}_{Bin(5,p_2)}\}$

$p(k) = \binom{5}{k} p_1^k (1-p_1)^{5-k}$

$P(B) = 1 - P\{\underbrace{K \text{ succ. al secondo esp}}_{\binom{5}{k} p_2^k (1-p_2)^{5-k}}, \underbrace{\text{al più } K-1 \text{ succ. al primo esp}}_{\binom{5}{k-1} p_1^{k-1}(1-p_1)^{5-(k-1)}}\}$

$= 1 - \sum_{k=1} \binom{5}{k} p^k (1-p_2)^{5-k} \binom{5}{k-1} p_1^{k-1} (1-p_1)^{5-(k-1)}$

9. Consideriamo un'urna con N palline, di cui N1 sono rosse, mentre N − N1 sono di colore diverso dal rosso. Consideriamo l'esperimento che consiste nell'estrazione di n ≤ N palline, in cui il "successo" `e l'estrazione di una pallina rossa. Sia Wn la variabile aleatoria che conta il numero di palline rosse estratte tra le n.
Determinare il range di Wn e la funzione di probabilit`a pWn associata.

N palline N_1 Rosse $N-N_1$ blu

estraggo $n \leq N$ palline, successo se la palla è rossa

W_n = # successi = # palline rosse estratte

$P(W_n = h) > 0 \iff$ ci sono almeno h palle rosse

$N - N_1 \geq n - h \iff h \geq n - (N - N_1) = N_1 - (N - n)$

Range $w_n = \{h_0, h_{0+1}, \dots, N\}$ $h_0 = \max\{0, N_1 - (N-n)\}$

$P_{W_n} = \frac{\binom{N_1}{h}\binom{N-N_1}{n-h}}{\binom{N}{n}}$

FOGLIO 4

domenica 26 marzo 2023 14:20

1. Sia X una v.a. che prende valori

$$X = \begin{cases} -1, & \text{con probabilità } 1/4; \\ 1, & \text{con probabilità } 1/8; \\ 3, & \text{con probabilità } 5/8. \end{cases}$$

(a) Calcolare la densità discreta di X.

(b) Calcolare la funzione di ripartizione di X.

(c) Calcolare i valori attesi $E(X)$, $E(X^4 + 1)$.

a) $X \in \{-1, 1, 3\}$ $\quad p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } x = -1 \\ \frac{1}{8} & \text{se } x = 1 \\ \frac{5}{8} & \text{se } x = 3 \end{cases}$

$$p^X : \begin{array}{l} S_X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow P(X = x) \end{array}$$

1) $p_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in S_X = \{-1, 1, 3\}$

2) $\sum_{x \in S_X} p_X(x) = 1 \iff \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = 1$

$p_X(x)$ è una densità discreta

b) La funzione di ripartizione (o cumulative distribution function, in inglese) è una funzione matematica che descrive la probabilità che una variabile casuale X assuma un valore minore o uguale ad un certo valore x. In altre parole, la funzione di ripartizione F(x) di una variabile casuale X è definita come:

F(x) = P(X ≤ x)

dove P(X ≤ x) rappresenta la probabilità che X assuma un valore minore o uguale ad x.
La funzione di ripartizione F(x) è una funzione crescente e limitata, con valori compresi tra 0 e 1. In particolare, F(x) = 0 per x < min(X) e F(x) = 1 per x > max(X), dove min(X) e max(X) rappresentano rispettivamente il valore minimo e il valore massimo che X può assumere.

Sia $F : S_X \to \mathbb{R}$ la f. di ripartizione

$F(x) = P(X \leq x) =$
- $P(X \leq -1) = F(-1) = \frac{1}{4}$
- $P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $P(X \leq 3) = F(3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = 1$

Per gli altri valori es:

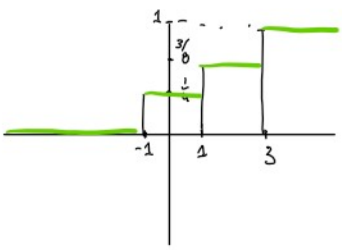
$x = 8 \quad F(8) = P(x \leq 8) = F(3) = 1$

$x = -3 \quad F(-3) = P(x \leq -3) = 0$

$x = 0 \quad F(0) = P(x \leq 0) = F(-1) = 1/4$

$x = 2 \quad F(2) = P(x \leq 2) = F(1) = 3/8$

Quindi $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{4} & \text{se } x \in [-1, 1) \\ \frac{3}{8} & \text{se } x \in [1, 3) \\ 1 & \text{se } x \in [3, \infty) \end{cases}$



c) $E[X] = \sum_{x \in S_X} x\, p_X(x) = \sum_{x=1,-1,3} x\, p_X(x) = 1 \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{5}{8} =$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{15}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} = \boxed{1{,}75}$

$E[(X^4+1)] \overset{\text{prop.}}{=} E[X^4] + \underbrace{E[1]}_{1} = E[X^4] + 1 = \sum_{x \in S_X} x^4 p_X(x)$

$E[1] \to 1$ è cost

$= 1 + 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 81 \cdot \frac{5}{8} = \frac{408}{8} + 1 = \boxed{52}$

2. Se X e Y sono due variabili aleatorie che rappresentano i risultati del lancio di due dadi, determinare distribuzione, media, moda e mediana di $X - 2Y$. Dire infine se $X - 2Y$ è indipendente da $X + Y$.

$y, x \in \{1, \dots, 6\}$ $\quad 2y \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $\quad Z = X - 2Y$

preliminar.

$p_X(x) = \frac{1}{6} \quad \forall x \qquad p_{2Y}(x) = \frac{1}{6} \quad \forall x$

valore atteso/medio

- $E[(X-2Y)] = E[X] - 2E[Y] = 3{,}5 - 2 \cdot 3{,}5 = \boxed{-3{,}5}$

$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = 3{,}5$

moda

- $\text{moda} = mo_X = i$ t.c. $\overbrace{-7 \le i \le 0}^{\text{valore modale}}$

$\nexists \max P_Z(Z=z)$ non è def.

Quindi, per calcolare la moda di (X-2Y), dobbiamo cercare il valore che appare con la massima frequenza.

X↓ 2Y→	2	4	6	8	10	12
1	-1	-3	-5	-7	-9	-11
2	0	-2	-4	-6	-8	-10
3	1	-1	-3	-5	-7	-9
4	2	0	-2	-4	-6	-8
5	3	1	-1	-3	-5	-7
6	4	2	0	-2	-4	-6

Range $Z = \{-11, \dots, 4\}$

legge/distribuz.

- $p_Z(z) = \frac{1}{36}$ se $z \in \{-11, -10, 3, 4\}$

$p_Z(z) = \frac{2}{36}$ se $z \in \{1, 2, -8, -9\}$

$p_Z(z) = \frac{3}{36}$ se $z \in \{-7 \le i \le 0\}$

• mediana dispongo i risultati in ordine crescente

$-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

$$\text{mediana}_X = \frac{-4+(-3)}{2} = \boxed{-\frac{7}{2}}$$ mediana

indipendenti chiedere

$Z = X - 2Y \qquad W = X + Y$

Se Z e W sono indip $\Rightarrow E[(Z \cdot W)] = E[Z] \cdot E[W]$

claim non sono indip trovo un controesempio

$X+Y = 12$ (esce 6, esce 6) $\qquad Z = -11$ ($x=1, y=6$) $\qquad P(X+Y=12, Z=-11) = 0$

ma $P(X+Y=12) = \frac{1}{36} \qquad P(Z=-11) = \frac{1}{36}$

e $\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \neq 0 \Rightarrow$ non sono indip.

3. Si lanci un dado con risultato $N \in \{1,2,3,4,5,6\}$ e si lanci poi una moneta N volte. Sia X il numero di teste ottenute. Calcolare la densità discreta di X e il valore atteso $\mathbb{E}(X)$.

Y = risultato dado

X = # teste ottenute lanciando la moneta N volte

• $$P(X=k) \underset{\text{partizione}}{=} \sum_{\ell=k}^{6} \underbrace{P(X=k \mid Y=\ell)}_{\substack{Bin(\ell, \frac{1}{2}) \\ \binom{\ell}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-k}}} \cdot \underbrace{P(Y=\ell)}_{\frac{1}{6}} = \sum_{\ell=k}^{6} \binom{\ell}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-k}\frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{6}\sum_{\ell=k}^{6}\binom{\ell}{k}\frac{1}{2^\ell}}$$

• $$E[X] = \sum_i x\, p_X(x) = \sum_i k\, P(X=k) = \boxed{\sum_{k=0}^{6} k \sum_{\ell=k}^{6} \frac{1}{6}\binom{\ell}{k}\frac{1}{2^\ell}}$$

$X \overset{(d)}{\sim} Bin(N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ con $0 \leq k \leq N$ $\quad k$ = # successi cioè se esce T è un successo

$E[X] = Np$.

4. (a) Mostrare che, se X e Y sono due variabili aleatorie e X è costante, allora X e Y sono indipendenti.
(b) Siano X, Y variabili aleatorie tali che X^2 e Y^2 sono indipendenti. Possiamo concludere che anche X e Y sono indipendenti?

Se X è cost $\Rightarrow E[X] = c$

$P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$ da dim

a $P(X=c, Y=y) = P(Y=y) = P(X=c)P(Y=y)$

b Provo a trovare un controesempio

$\text{Range}(X) = \text{Range}(Y) = \{-1, 1\}$

$E(X^2 \cdot Y^2) = E[X^2] \cdot E[Y^2] = 0$ cioè $X^2 \perp\!\!\!\perp Y^2$

$P_{XY}(1,1) = P_{XY}(-1,-1) = \frac{1}{2}$

$P_{XY}(1,-1) = P_{XY}(-1,1) = 0$ chiedere!

$P_X(1)P_Y(-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

5. Se le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3, X_4 rappresentano i lanci successivi di un dado, calcolare

$$E[(X_1+X_2)(X_3+X_4)]$$

$$E[(X_1+X_2)] \cdot E[(X_3+X_4)] = \left(E[X_1] + E[X_2]\right) \cdot \left(E[X_3] + E[X_4]\right) = 49$$

$$(3{,}5 + 3{,}5) \cdot (7)$$

oppure.

$$E[(X_1+X_2)(X_3+X_4)] = E[X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4] =$$

$$E[X_1X_3] + E[X_1X_4] + E[X_2X_3] + E[X_2X_4] =$$

$$= \underbrace{E[X_1] \cdot E[X_3]}_{(3{,}5)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2} + E[X_1] \cdot E[X_4] + E[X_2]E[X_3] + E[X_2]E[X_4] =$$

$$= 4 \cdot E[X_1]^2 = 4 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 49$$

6. In un contenitore ci sono sei palline numerate da 1 a 6. Ne vengono estratte due senza reimmissione. Determinare legge congiunta, le leggi marginali e i corrispondenti valori di media e varianza delle seguenti variabili aleatorie:

(a) X = "massimo tra i due valori ottenuti", $X \in \{2, \dots, 6\}$

(b) Y = "minimo tra i due valori ottenuti". $Y \in \{1, \dots, 5\}$

$$p_X(K) = \sum_{y \in S_Y} p_Z(K, y)$$

$$p_Y(K) = \sum_{x \in S_X} p_Z(x, K)$$

$$p_Z(x,y) = P\{X = x, Y = y\}$$

legge congiunta

$$P\{Z = (x,y)\} = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot 2 = \frac{1}{15}.$$

ci sono 15 possibili $Z \Rightarrow \sum p_Z(x,y) = 1$

(2, 1) (3, 1) (4, 1) (5, 1) (6, 1)
(3, 2) (4, 2) (5, 2) (6, 2)
(4, 3) (5, 3) (6, 3)
(5, 4) (6, 4)
(6, 5)

legge marginale di X

$$p_X(2) = p_Z(2,1) = \frac{1}{15}$$

$$p_X(3) = p_Z(3,1) + p_Z(3,2) = \frac{2}{15}$$

$$p_X(4) = p_Z(4,1) + p_Z(4,2) + p_Z(4,3) = 3 \cdot \frac{1}{15}$$

$$p_X(K) = \frac{1}{15}(K-1)$$

$$p_Y(4) = p_Z(5,4) + p_Z(6,4) = 2 \cdot \frac{1}{15}$$

$$p_Y(K) = \frac{1}{15}(6-K)$$

numero di valori di max possibili

$$E[X] = \sum_{x\in S_X} p_X(x) \cdot x = \sum_{K=1}^{6} \frac{1}{15}(K-1) \cdot K = \frac{1}{15}\sum_{K=1}^{6} K^2 - K =$$

$$\frac{1}{15}\left(\sum_{K=1}^{6} K^2 - \sum_{K=1}^{6} K\right) = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 - 21\right) = 4{,}667$$

alternativ.

$$E[X] = \sum_{x\in S_X} p_X(K) \cdot x = \left(2 \cdot \frac{1}{15} + 3 \cdot \frac{2}{15} + 4 \cdot \frac{3}{15} + 5 \cdot \frac{4}{15} + 6 \cdot \frac{5}{15}\right) = 4{,}667$$

$$E[Y] = \sum_{y\in S_y} p_y(x) \cdot x = \sum_{K=1}^{5} \frac{1}{15}(6-K) \cdot K = \frac{1}{15}\sum_{K=1}^{5} 6K - K^2 = \frac{1}{15}\left(6 \cdot 15 - \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11\right) = 2{,}333$$

varianza

$$\mathrm{var}(X) = \underset{\substack{\| \\ 22{,}93 \\ \sum x^2 p_X(x) = \sum_{K=2}^{6} \frac{1}{15}(K-1)K^2}}{E[X^2]} - \underset{\substack{\| \\ 4{,}667^2}}{E[X]^2} = E\left[(X - E(X))^2\right] = 1{,}15$$

$\mathrm{var}(Y) =$ calcoli.

7. Sia X una variabile aleatoria a valori reali con densità discreta

$$\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n} \qquad (n \geq 1)$$

(a) Determinare la probabilità dei seguenti eventi:
  i. $X \geq 1$;
  ii. $X \geq \frac{1}{10}$;
  iii. $X \leq 0$;
  iv. $0 \leq X < \frac{1}{2}$.

(b) Trovare $\mathbb{E}(X)$

Ripetere il punto (b) per la variabile aleatoria Y con densità discreta

$$\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \qquad (n \geq 1)$$

e

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n} \qquad (n \geq 2)$$

$P(X \geq 1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$

$P(X \geq \frac{1}{10}) = P(\frac{1}{10} \leq X \leq 1) =$ $\qquad \left(\frac{1}{n} \geq \frac{1}{10}\right) \Rightarrow n \leq 10$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$$

$P(X \leq 0) = 0$

$$P(0 \leq X < \tfrac{1}{2}) = 1 - \overbrace{\left[P(X=1) + P(X = \tfrac{1}{2})\right]}^{P(X \geq \frac{1}{2})} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$E[X] = \sum_{x\in S_X} x\, p_X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}$$

b) $$E[Y] = \sum y\, p_y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{1}{2^n}$$

FOGLIO 5 EPS

venerdì 11 agosto 2023 10:32

es 1

Q = somma di denaro posseduta dal giocatore all'inizio. $Q>0$

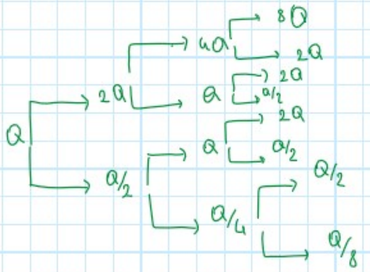
$P\{\text{vittoria}\} = p$ $\quad P\{\text{sconfitta}\} = 1-p$

se vince $Q \longrightarrow 2Q$

se perde $Q \longrightarrow Q/2$

Quale è la quantita' attesa di denaro dopo l'n-turno?

Calcolare $\lim_{n\to+\infty}$



$X_i = \{\text{vittoria i-esimo turno}\}$

$\boxed{X \sim \text{Rademacher cioè fa } \begin{matrix} +1 & \text{se vinco} \\ -1 & \text{se perdo} \end{matrix}}$

$Y_i = \{\text{somma di denaro posseduta all'i-esimo turno}\}$

$Y_0 = Q$

$Y_n = 2^X Q$

1 turno se vinco $2^1 Q$

se perdo $2^{-1} Q$

se vinco sempre $2^{\overbrace{(1+\dots+1)}^{n}} Q = 2^n Q$

se perdo sempre $2^{-n} Q$

2 turno 1 sconf + 1 vittoria $= 2^{\underbrace{-1}_{S}+\underbrace{1}_{V}} Q = Q$

$E[X_i] = \sum_{x\in R(X)} x\, p_X(x) = 1\cdot p + (-1)(1-p) = p + p - 1 = 2p-1$

$E[X] = \sum_i E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} (2p-1) = n(2p-1)$

$E[Y_n] = 2^{E[X]} Q = 2^{n(2p-1)} \cdot Q$

$\lim_{n\to+\infty} 2^{n(2p-1)} \cdot Q \quad \begin{cases} = +\infty \iff 2p-1>0 \iff p>\frac{1}{2} \\ = 0 \iff 2p-1<0 \iff p<\frac{1}{2} \\ = Q \iff 2p-1=0 \iff p=\frac{1}{2} \end{cases}$

es 2

X, Y, Z v.a. indip $\quad X, Y, Z \sim Pois(\lambda)$

1) legge condizionale di X dato $X+Y=n$?
è una legge nota?
Trova la media di questa legge

Cose di Teoria che ci serviranno

a) $A \sim Pois(\lambda) \quad p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

b) $A \sim Pois(\lambda)$ e $B \sim Pois(\mu)$ e A, B sono indip $\Rightarrow A+B \sim Pois(\lambda+\mu)$

c) legge condiz di B dato $A=a \quad P_B(S \mid A=a) = P(B \in S \mid A=a)$
densità discreta $p_{B|A}(B|A) = P(B=b \mid A=a) = \frac{P(A=a, B=b)}{P(A=a)} = \frac{P_{(A,B)}(a,b)}{P_A(a)}$

$$P(X=x \mid X+Y=n) \overset{\text{per c}}{=} \frac{P(X=x, Y=n-x)}{P(X+Y=n)} \overset{X \text{ e } Y \text{ indip. per hp}}{=} \frac{P(X=x) \cdot P(Y=n-x)}{P(X+Y=n)} = \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-x}}{(n-x)!} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}}{\frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^n}{n!}} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{-2\lambda}}\,\cancel{\lambda^{n}}}{(n-x)!\,x!} \cdot \frac{n!}{\cancel{e^{-2\lambda}}\,\cancel{\lambda^{n}}\,2^n} = \boxed{\binom{n}{x}\frac{1}{2^n}}$$

$P(Y=n-x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-x}}{(n-x)!}$ per (a)

$P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ per (a)

$P(X+Y=n) = P(W=n) = e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^n}{n!}$ per (b)
con $W = X+Y$ e $W \sim Pois(2\lambda)$

$\boxed{\text{è la } Bin(n, \frac{1}{2})}$ $\quad \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ = distribuzione del n° di successo in una seq. di n prove di Bernoulli

media $= E[v.a.] = E[Bin(n, \frac{1}{2})] = np = \boxed{\frac{n}{2}}$

2) $Cov(X+Y, X+Z)$

Teoria

A $Cov(A,B) = E[(A-E[A])(B-E[B])]$

B $Var(Pois(\lambda)) = \lambda$

C $E[AB] = E[A]E[B]$ se A, B sono indip.

D Uso il fatto che Cov è Bilineare
cioè $Cov(A+B, Z) = Cov(A,Z) + Cov(B,Z)$
$Cov(A, B+Z) = Cov(A,B) + Cov(A,Z)$

e $Cov(A,B) = E[AB] - E[A]E[B]$

$$\text{cov}(X+Y, X+Z) \overset{(d)}{=}$$

$$\text{cov}(X, X+Z) + \text{cov}(Y, X+Z) \overset{(d)}{=} \text{cov}(X,X) + \text{cov}(X,Z) + \text{cov}(Y,X) + \text{cov}(Y,Z) =$$

$$(e) = \text{Var}(X) + (E[XZ] - E[X]E[Z]) + (E[YX] - E[Y]E[X]) + (E[YZ] - E[Y]E[Z]) =$$

$$(c) = \text{Var}(X) + (E[X]E[Z] - E[X]E[Z]) + (E[X]E[Y] - E[X]E[Y]) + (E[Y]E[Z] - E[Y]E[Z]) =$$

$$(b) = \lambda + 0 + 0 + 0 = \boxed{\lambda}$$

3) Quanto vale $P(X+Y=2, X+Z=3)$

$$P(X+Y=2, X+Z=3) = \sum P(X+Y=2, X+Z=3 \mid X=k) \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{2} P(Y=2-k, Z=3-k \mid X=k) \cdot P(X=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \frac{P(Y=2-k) \cdot P(Z=3-k) P(X=k) \cdot P(\cancel{X}=k)}{P(X=k)} = \sum_{k=0}^{2} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2-k}}{(2-k)!} \, e^{-\lambda}\frac{\lambda^{3-k}}{(3-k)!}$$

X, Y, Z indip + p. condiz.

$$= e^{-3\lambda} \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\lambda^{2-k}}{(2-k)!} \cdot \frac{\lambda^{3-k}}{(3-k)!} = e^{-3\lambda}\left(1 \cdot \frac{\lambda^2 \cdot \lambda^3}{2! \, 3!} + \lambda \cdot \lambda \cdot \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^2}{2!} \cdot 1 \cdot \lambda\right) = \boxed{e^{-3\lambda}\left(\frac{\lambda^5}{12} + \frac{\lambda^4}{2} + \frac{\lambda^3}{2}\right)}$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad P(Y=2-k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2-k}}{(2-k)!} \qquad P(Z=3-k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{3-k}}{(3-k)!}$$

es 3

esperimento di Bernoulli di parametro p

T = istante del 1 successo

U = istante del 2 successo

1) legge di distribuzione di U

$T \sim G(p)$ $\quad p_T(t) = p(1-p)^{k-1}$ (primo successo alla k-prova)

$U \sim Binneg(h,p)$ (istante dell' h successo) cioè $Binneg(2,p)$

$P(U=k) = \binom{k-1}{h-1} p^h (1-p)^{k-h} = \binom{k-1}{1} p^2 (1-p)^{k-2}$

2) T e U sono indipendenti?

$P(T=s, U=k) \overset{?}{=} P(T=s) \cdot P(U=k)$

il 1 succ. alla prova s

secondo succ alla prova k.

NO → $P(T=2, U=2) = \phi \neq P(T=2) \cdot P(U=2)$

$p(1-p)^{2-1} \cdot \binom{2-1}{2-1} p^2 (1-p)^{2-2} \simeq p(1-p) \cdot p^2$

3) det legge di distrib. di T sapendo che $U = n \geq 1$

non sono indip — legge T

$$P_T(T=k \mid U=n) = \frac{P(T=k, U=n)}{P(U=n)} = \frac{(1-p)^{k-1}p \; (1-p)^{n-(k-1)-2} \; p}{(n-1)\,p^2\,(1-p)^{n-2}} = \frac{(1-p)^{\cancel{k}\cancel{-1}+n-\cancel{k}+\cancel{1}-2}}{(1-p)^{n-2}} \frac{1}{n-1} = \boxed{\frac{1}{n-1}}$$

→ legge di U

$P(U=n) = \binom{n-1}{1} p^2 (1-p)^{n-2} = (n-1)\,p^2 (1-p)^{n-2}$

$P(T=k) = p(1-p)^{k-1}$ con $k < n$

$\underbrace{x \; x \,\_\_\, x}_{(1-p)^{k-1}} \; \underset{p}{\overset{k}{\checkmark}} \; \underbrace{x \; x \; x}_{(1-p)^{n-(k-1)-2}} \; \underset{p}{\overset{n}{\checkmark}} \; x \; x \; x$

$n = 7$

$x \; x \; x \; \checkmark \; x \; x \; \checkmark$

$(1-p)^3 \, p \quad (1-p)^{7-(3)-2} \quad p$

le due vittorie

es 5

X, Y v.a.

$Z = \begin{cases} X & \text{se esce T} \\ Y & \text{se esce C} \end{cases}$ $\quad p = \frac{1}{2}$ $\quad Z \sim B(\frac{1}{2})$

Z è indip da X e Y

TRUCCO

$\boxed{Z = IX + (1-I)Y \qquad I \in \{0,1\} \quad T=1,\ C=0}$

1) $Cov(X,Z) = Cov(X, IX + (1-I)Y) = Cov(X, IX) + Cov(X, (1-I)Y) =$

$\frac{1}{2}\left(Var(X) + Cov(X,Y)\right)$

$Cov(X, IX) = E[XIX] - E[X]E[IX] = E[I]E[X^2] - E(X)^2 E[I] =$

$E[I]\left(E[X^2] - E[X]^2\right) = \overset{1/2}{I}\; Var(X) = \frac{1}{2} Var(X)$

$Cov(X, (1-I)Y) = E[XY(1-I)] - E[X]E[(1-I)Y] = (1-I)E[XY] - E(X)(1-I)E(Y)$

$(1-I)\left(E[XY] - E[X] \cdot E[Y]\right)$

$(1-\frac{1}{2}) \quad \overset{\shortparallel}{Cov(X,Y)}$

es 6 chiedere

$Z = \max\{x^2, y^2\}$

X, Y v.a. standardizzate cioè $E[X]=0$ e $Var[X]=1$

$cov(X,Y) = \rho$

1) $E[Z] = 1$ se $|\rho| = 1$

$\rho(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma(x)\,\sigma(y)}$ con $\sigma(x) = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{1} = 1$
idem $\sigma(y)$

Sia $|\rho| = 1 = |cov(X,Y)|$

Teoria

- Se $cov(X,Y) \in [-1,1]$ e $|cov(X,Y)| = 1 \Rightarrow X = \alpha Y$
- $Z = \max\{X^2, Y^2\} = \max\{\alpha^2 Y^2, Y^2\}$
- $1 = \sigma(X) = \sigma(\alpha Y) = \alpha\,\sigma(Y) \Rightarrow \alpha = 1$
- $\max(\alpha^2 Y^2, Y^2) = Y^2$
- $E[Z] = E[Y^2] = \underbrace{Var(Y)}_{E[Y^2]-E[Y]^2} + E[Y]^2 = 1$, con $Var(Y) = 1$, $E[Y] = 0$

2) $1 \le E[Z] \le 1 + \sqrt{1-\rho^2}$

hint usare che $x,y > 0$ $\boxed{\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)}$

Cauchy - Schwartz

$Z = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$

$E[Z] = \frac{1}{2}E[(x^2+y^2+|x^2-y^2|)] = \frac{1}{2}[E[x^2] + E[y^2] + E[|x^2-y^2|]]$, con $E[x^2] = 1$, $E[y^2] = 1$

$= \frac{1}{2}(2 + E[|x^2-y^2|]) = 1 + \frac{1}{2}E[|x^2-y^2|]$

$= 1 + \frac{1}{2}E[(x-y)(x+y)] \overset{\text{Cauchy Schwartz}}{\le} 1 + \frac{1}{2}E[(x-y)^2]^{\frac{1}{2}}\,E[(x+y)^2]^{\frac{1}{2}}$

$= 1 + \frac{1}{2}\sqrt{E[(x-y)^2]}\sqrt{E[(x+y)^2]} =$ da finire

es 8

ho m gettoni con $m \geq 3$ $1\ 2\ 3\ 4\ 5 \_\_\_ m$

1 estr.   estraggo 2

2 estr. $\Omega = \{1, 3, 4, 5, \_, m\}$ estraggo 5

3 estr $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, \_ m\}$

S_n = { num di volte in cui il gettone m è estratto nelle prime n estrazioni }

1. $E[S_n]$

$$A_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce m all'i-esima estr.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$A_i \sim B(p)$

$$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} E[\mathbb{1}_{A_i}] = \sum_{i=1}^{n} P(\mathbb{1}_{A_i} = 1)$$

- $P(\mathbb{1}_{A_1} = 1) = \frac{1}{m}$ = prob di estrarre il gettone alla prima estrazione

se esce alla seconda estr. non può uscire alla prima

$$P(\mathbb{1}_{A_2} = 1) = P(\overbrace{\mathbb{1}_{A_2} = 1, \mathbb{1}_{A_1} = 0}) \underset{\text{indip}}{=} \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{m-1} = \frac{1}{m}$$

$$P(\mathbb{1}_{A_j} = 1) = P(\mathbb{1}_{A_j} = 1, \mathbb{1}_{A_{j-1}} = 0) = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m}$$

$$E[S_n] = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$$

2) lim in prob di $\frac{S_n}{n}$

$$\lim_{n} P\{|\tfrac{1}{n} S_n - c| > \varepsilon\} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

c è il valore a cui converge

claim $c = \frac{1}{m}$ " essendo $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{m}$ "

prop varianza

$$P\{|\tfrac{S_n}{n} - \tfrac{1}{m}| > \varepsilon\} \underset{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^2} Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} Var(S_n) \leq \frac{nK}{n^2 \varepsilon^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Binom $Var(Bin(n, \frac{1}{m}))$

$$= n \underbrace{\left(\frac{1}{m} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right)}_{K}$$

$n\, p\, (1-p)$

es 9

dado lanciato n volte

$S_n = \{ \#$ volte in cui è uscito il 6 su n lanci $\}$

1) dim che $\lim_{n \to +\infty} P\left[\frac{S_n}{n} > \frac{1}{3} \right] = 0$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce 6 all'i-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P(X_i) = \frac{1}{6} \sim B\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i}$$

$$E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n} E[S_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{n} \frac{n}{6} = \frac{1}{6}$$

Teoria

$$P\left(|\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]| > \varepsilon \right) \overset{\text{Cheb.}}{\leq} \frac{Var(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\sigma^2}{n}$$

$$Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_i Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_i \sigma^2 = n \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$Var\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]) \right) \overset{E[\bar{X}_n]=0 \text{ perché stand.}}{=} \frac{n}{\sigma^2} Var(\bar{X}_n) = 1$$

$$P\left\{ \frac{S_n}{n} > \frac{1}{3} \right\} = P\left\{ \frac{S_n}{n} > \underbrace{\overbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}^{1/3}}_{\text{trucco}} \right\} = P\left\{ \frac{S_n}{n} - \frac{1}{6} > \frac{1}{6} \right\} \leq$$

$$P\left\{ \left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{6} \right| > \frac{1}{6} \right\} \underset{\text{divido per } \sigma_n}{\leq}$$

$$P\left(\frac{\left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{6} \right|}{\sigma_n} \leq \frac{1}{6\sigma_n} \right) \underset{\text{cheb.}}{\leq} \frac{Var\left(\frac{S_n}{n\sigma_n}\right)}{\left(\frac{1}{6\sigma_n}\right)^2} = (6\sigma_n)^2 \cdot \underset{\text{stand}}{1} = \cancel{36} \cdot \frac{5}{\cancel{36}} \frac{1}{n} = \frac{5}{n} \longrightarrow 0$$

$\frac{\bar{S}_n}{\sigma_n}$

$$\sigma_n\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sqrt{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n^2} Var(S_n)} = \frac{1}{n}\sqrt{np(1-p)} = \frac{1}{n}\sqrt{n\frac{5}{36}} = \frac{1}{6n}\sqrt{5n} = \frac{\sqrt{5}}{6} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$p = \frac{1}{6}$ $\quad 1-p = \frac{5}{6}$

$$Var\left(\frac{S_n}{n} \cdot \frac{1}{\sigma_n} \right) = \frac{1}{\sigma_n^2} Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{\cancel{\sigma_n^2}} \cancel{\sigma_n^2} = 1$$

2) $\exists$ una cost c t.c. $P\left[\frac{S_n}{n} > \frac{1}{3}\right] \leq e^{-cn}$

$$P\left(\frac{S_n}{n} > \frac{1}{3}\right) = P\left(\alpha S_n > \alpha \frac{1}{3} n\right) \underset{\text{elevo alla e}}{=} P\left(e^{\alpha S_n} > e^{\alpha n/3}\right) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{E\left[e^{\alpha S_n}\right]}{e^{\alpha n/3}} =$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (pe^{\alpha})^k (1-p)^{n-k}}{e^{\alpha n/3}} = \frac{(pe^{\alpha} + 1 - p)^n}{e^{\alpha n/3}} = e^{-\frac{\alpha n}{3} + n\log(pe^{\alpha} + 1 - p)}$$

es 11

$(X_n)_n = \{X_i\}_i$ con $X_i \sim Pois(\lambda)$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$

Stimare $P[|\bar{X}_n - \lambda| \geq \eta]$ con Chebshev

$$P[|\bar{X}_n - \lambda| \geq \eta] \overset{C}{\leq} \frac{1}{\eta^2} Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{\eta^2} \frac{\lambda}{n}$$

$E[X_i] = \lambda \quad Var(X_i) = \lambda$

$$Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \lambda = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cancel{n} \cdot \lambda = \frac{\lambda}{n}$$

$$E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \lambda = \frac{\cancel{n}\lambda}{\cancel{n}} = \lambda$$

Stimare la stesso quantità facendo un' appross. in Gaussia

Teoria

$$TCL: \quad P\left\{ a \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq b \right\} \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

normalizzo cioè $Var = 1 \quad E = 0$

con $\sigma_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ e $\sigma = \sqrt{Var(X_i)}$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} \frac{(\bar{X}_n - m)}{\sigma} = \sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}_n - m)}{\sigma} = \frac{(\bar{X}_n - m)}{\sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma_n} \sim Z$$

$\sigma = \sqrt{Var(X_i)}$

$Z \downarrow$ distrib. norm.

$$P(|\bar{X}_n - \lambda| \geq \eta) \overset{\text{normalizzo}}{=} P\left(\frac{|\bar{X}_n - \lambda|}{\sigma_n} \geq \frac{\eta}{\sigma_n}\right) =$$

$$P\left(\frac{|\bar{X}_n - \lambda|}{\sqrt{\lambda/n}} \geq \frac{\eta\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}\right) \xrightarrow{TCL} \int_{-\infty}^{-\eta\sqrt{n/\lambda}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx + \int_{\eta\sqrt{n/\lambda}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 2\int_{\eta\sqrt{n/\lambda}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 2\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}}_{=1} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\eta\sqrt{n/\lambda}}}_{=\Phi(\eta\sqrt{n/\lambda})}\Big] =$$

$$= 2\left[1 - \Phi\left(\eta\sqrt{n/\lambda}\right)\right]$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{Var(X_i)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{\eta}{\sigma_n} = \eta\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}$$

c) $\lambda = 1 \quad n = 10.000, \quad \eta = 10^{-2}$

II metodo

$$\eta\sqrt{\frac{n}{\lambda}} = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{10.000}{1}} = \frac{100}{100} = 1$$

$$2[1 - \Phi(\eta\sqrt{n/\lambda})] = 2[1 - 0,8413] = 2 \cdot 0,15 = 0,3$$

$\downarrow$ Tabella

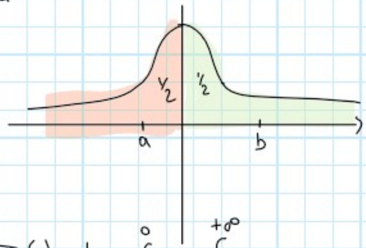
I metodo

$$\frac{1}{\eta^2}\frac{\lambda}{n} = \frac{1}{\frac{1}{100^2} \cdot 10000} = 1$$

Funzione di ripartizione Teoria

f. di ripartizione

- $\Phi(b) = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \quad , \quad \Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 1$
- $\int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx - \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$



- $\Phi(0) = \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{0} = \int_{0}^{+\infty}$
- c'è simmetria, f pari $\quad \int_{-a}^{a} = \int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a} \underset{\text{simmetria}}{=} 2\int_{0}^{a}$
- $P(-a \leq \_\_ \leq a) = P(|\_\_| \leq a) = \int_{-a}^{a} = 2\int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
- $P(\_\_ \leq -a, \_\_ \geq a) = P(|\_\_| \geq a) = \underbrace{\int_{-\infty}^{-a} + \int_{a}^{+\infty}}_{\text{Code}} = 2\int_{a}^{+\infty}$
- $\underset{1}{\underset{\parallel}{\int_{-\infty}^{+\infty}}} = \underset{\Phi(c)}{\underset{\parallel}{\int_{-\infty}^{c}}} + \int_{c}^{+\infty} \quad \Rightarrow \quad \int_{c}^{+\infty} = 1 - \Phi(c)$
- $\Phi(-c) = \int_{-\infty}^{-c} \quad \Rightarrow \quad \Phi(-c) = 1 - \Phi(c)$
- $\Phi(c) = \int_{-\infty}^{c} = \int_{-\infty}^{+\infty} - \underbrace{\int_{c}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{simmetria}} - \int_{-\infty}^{-c} = 1 - \Phi(-c)$

es 12

$(X_i)_{i=1}^{100}$ v.a. i.i.d $\quad X_i \sim G(p)$

Per quali p si possono definire $E[Z_1]$ e $Var[Z_1]$ con $Z_1 = e^{X_1}$

Teoria

$X \sim Geom(p)$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \underbrace{(1-p)^{k-1} p}_{p_X(k)} = p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dq} q^k \Big|_{q=1-p} = p \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = p \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) =$$

$$= p \frac{1}{(1-q)^2}\Big|_{q=1-p} = \frac{1}{p}$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p = \sum \underbrace{k(k+1)}_{k^2+k} (1-p)^{k-1} p - \sum k (1-p)^{k-1} p =$$

$$= p\left(\frac{d^2}{dp^2} \sum q^k - \frac{d}{dq} \sum q^k\right) = p \cdot \left(\frac{d}{dq} \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{(1-q)^2}\right) = p \left(\frac{1}{(1-q)^3} \cdot 2 \cdot - \frac{1}{(1-q)^2}\right) =$$

$$= \frac{2p}{p^3} - \frac{p}{p^2} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$E[e^{X_1}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^k (1-p)^{k-1} p = pe \sum_{k=1}^{+\infty} [(1-p)e]^{k-1} = pe \sum_{h=0}^{+\infty} [(1-p)e]^h = \boxed{\frac{pe}{1-e(1-p)}}$$

$k-1 = h$

se $\quad (1-p)e < 1 \iff$

$e - pe < 1 \iff \frac{e-1}{e} < p$

$$Var[e^{X_1}] = E[e^{2X_1}] - E[e^{X_1}]^2 = \boxed{\frac{pe^2}{1-e^2(1-p)} - \left(\frac{pe}{1-e(1-p)}\right)^2}$$

$$E[e^{2X_1}] = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{2k} (1-p)^{k-1} p = pe^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{[e^2(1-p)]^{k-1}}_{e^{2k-2}} = pe^2 \sum_{h=0}^{+\infty} [e^2(1-p)]^h = \frac{pe^2}{1-e^2(1-p)}$$

se $e^2(1-p) < 1 \iff$

$-\frac{1+e^2}{e^2} < p \iff \frac{(e-1)(e+1)}{e^2} < p$ ma $\frac{(e-1)(e+1)}{e^2} > \frac{e-1}{e}$

Tutto ha senso se $\boxed{p > \frac{(e-1)(e+1)}{e^2} > \frac{e-1}{e}}$

b) Usare TCL per appross $P\left(\sum_i e^{X_i} \leq 300\right)$ per $p = 0.9$

normalizzare $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{+\infty} e^{X_i}}{n}$

$0.9 > \frac{(e-1)(e+1)}{e^2}$ quindi ok

$$\mu = E\left[\sum_{i=1}^{100} e^{X_i}\right] = 100\, E[e^{X_i}] = 100 \frac{p \cdot e}{1-(1-p)e} = \frac{100 \cdot \frac{9}{10} \cdot 2{,}71}{1 - 2{,}71 + \frac{9}{10} \cdot e} = 335{,}07$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{100} e^{X_i}\right] = 100\, Var[e^{X_i}] = 1418{,}25$$

$$\sigma = \sqrt{Var(\sum_i e^{X_i})} = \sqrt{1418{,}25} = 37{,}66$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} e^{X_i} \leq 300\right) = P\left(\frac{\sum e^{X_i} - \mu}{\sigma} < \underbrace{\frac{300-\mu}{\sigma} = -\frac{35{,}07}{37{,}66}}_{-0{,}93}\right) = \phi(-0{,}93) = 1 - \phi(0{,}93) =$$

$1 - 0{,}8289 = 0{,}17$

13 finire

$E[X]=0$

$E[|X|^4]<+\infty$

Dim che $\exists\ C>0$ t.c. $\forall \varepsilon>0$ n int. >0 $P[|\bar{X}_n|\geq \varepsilon]\leq \frac{C}{\varepsilon^4 n^2}$

con $\bar{X}_n$ media empirica di n copie indip di X

$\mu=0$ $\quad \sigma=\sqrt{Var(X)}$ $\quad \sigma_n=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{Var\,\bar{X}_n}$

$$P\left(\frac{|\bar{X}_n|}{\sigma_n}\geq\frac{\varepsilon}{\sigma_n}\right)=P\left(\frac{|\bar{X}_n|^4}{|\sigma_n|^4}\geq\frac{\varepsilon^4}{\sigma_n^4}\right)$$

chiamo $Y_n=\frac{|\bar{X}_n|^4}{|\sigma_n|^4}$ $\quad P\left(Y_n\geq\frac{\varepsilon^4}{\sigma_n^4}\right)\leq\frac{E[Y_n]}{\varepsilon^4}\sigma_n^4=\frac{E[Y_n]}{\varepsilon^4}\frac{\sigma^4}{n^2}$

Stimiamo $E[Y_n]$ voglio che sia $<+\infty$

$$E[Y_n]=\frac{1}{\sigma_n^4}E[\bar{X}_n]^4=\frac{1}{\sigma_n^4}\frac{1}{n^4}E[X_n]^4=\frac{n^2}{\sigma^4}\cdot\frac{1}{n^4}E[\sum_{i=1}^n X_i]^4=$$

$$\frac{1}{\sigma^4 n^2}E[\sum_{ijke=1}^n X_iX_jX_kX_e]$$

es 10

a) Quanto deve essere grande n affinché con prob. $>$ di 0,99 l'errore è commesso sia al più 0.1

$$A_i=\begin{cases}1 & \text{se esca T}\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}\quad \text{con prob } p$$

$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_i^1 A_i$

$$E[\bar{X}_n]=\frac{1}{n}E[\sum A_i]=\frac{1}{n}n.\ E[A_1]=\ p$$

$$Var[\bar{X}_n]=Var\left(\frac{1}{n}\sum A_i\right)=\frac{1}{n^2}Var\left(\sum_i^1 A_i\right)=\frac{1}{n^2}n.\ Var[A_i]=\frac{1}{n}\underbrace{p(1-p)}_{\sigma^2}$$

$$P(|\bar{X}_n-p|>\varepsilon)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}Var(\bar{X}_n)=\frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2}$$

$\hookrightarrow$ ho fatto $\geq$ quindi metto $(1-p)$ al posto di p

a) $\varepsilon=0{,}1.$ $\quad \frac{\sigma_n^2}{(0{,}1)^2}\leq \underset{(1-0{,}99)}{0{,}01}\iff\frac{p(1-p)}{n}\leq 10^{-4}\iff n\geq p(1-p)10^4$

b) $\varepsilon=0{,}01$ $\quad \frac{\sigma_n^2}{(0{,}01)^2}\leq\underset{1-0{,}9}{0{,}1}\iff\frac{p(1-p)}{n}\leq 10^{-5}\iff n\geq p(1-p)10^5$

es 4 chiedere

Um sacchetto contiene r gettoni rossi

Inserisco un gettone blu

e poi estraggo un gettone con reinserimento

Ripeto il procedimento fino a quando non estraggo quello rosso

R
1+R
esce blu
R+1+1
esce blu
R+1+1+1
esce R

N = # estrazioni

1) $P[N=\infty]=0$

$X_i = \{$esce R all'i-es. turno$\}$ $\quad Y_i = \{$esce B all'i-esimo turno$\}$

1 turno $P(X_1)=\frac{r}{r+1}$ $\quad P(Y_1)=\frac{1}{r+1}$

2 turno $P(X_2)=\frac{r}{r+2}$ $\quad P(Y_2)=\frac{2}{r+2}$

⋮

r turno $P(X_r)=\frac{r}{r+r}=\frac{1}{2}$ $\quad P(Y_r)=\frac{r}{r+r}=\frac{1}{2}$

⋮

N turno $P(X_N)=\frac{r}{r+N}$ $\quad P(Y_N)=\frac{N}{r+N}$

$P(X_N) < P(X_{N-1}) < \dots < P(X_1)=\frac{r}{r+1}$

$P(N=1)=P(X_1)=\frac{r}{r+1}$ praticamente la legge di N = legge di X_i

$P(N=2)=P(X_2)=\frac{r}{r+2}$

⋮

$P(N=n)=P(X_n)=\frac{r}{r+n}$

$\lim_{n\to+\infty} P(N=n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{r}{r+n} \to 0$

alterm. $\lim_{n\to+\infty} P(n=n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{r}{r+n} \leq \lim_{n\to+\infty} P(N=1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{r}{r+1}\right)^{n-1}$

2) legge di N

3) $E[N]$, $Var[N]$

es 7 da finire

$n \geq 1$ lanci dado

$X_i = \{$risultato lancio i-esimo$\}$

"calo all'estrazione con $k \geq 2$ se $X_k < X_{k-1}$"

$D_n = \{$# dei cali nei lanci fatti$\}$

a) Scrivere D_n come $\sum_i$ v. a. di Bernoulli

es 3 lanci 3 $\underbrace{4 \quad 1}_{\text{calo}}$ $|D_n| = 1$

$A_i = \{$calo al lancio i-esimo$\}$

$\mathbb{1}_{A_i} = \begin{cases} \text{successo se ho un calo al lancio i-esimo} \\ \text{insuccesso se non ho un calo al lancio i-esimo} \end{cases}$

$D_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$

2 $E[\mathbb{1}_{A_i}]$

$Cov[\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}]$ $i \neq j$

$E[\mathbb{1}_{A_i}] = \sum_i x_i \, p_X(x_i) = \sum_i i \, \frac{(i-1)}{6}$

$= P[\mathbb{1}_{A_i} = 1].$

FOGLIO 6 EPS

sabato 12 agosto 2023 20:05

es 1

ripeto 60 volte l'estrazione con reinserimento

50 biglie di cui 15 bianche

$q =$ # biglie bianche estratte

Calcolare $P(10 < q \leq 30)$

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce B alla i-esima estrazione} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Teoria

$$P\left(a \leq \frac{\sum^n X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\parallel$$

$$P\left(a \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X_n} - m) \leq b\right)$$

$X_n = \sum_{i=1}^{60} X_i$ con $X_i \sim B\left(\frac{15}{50}\right) = B\left(\frac{3}{10}\right)$ $X_n \sim Bin\left(60, \frac{3}{10}\right)$

$E[X_n] = mp = 60 \cdot \frac{3}{10} = 18$

$Var(X_n) = np(1-p) = 60 \frac{3}{10}\left(1 - \frac{3}{10}\right) = 18 \frac{7}{10} = \frac{63}{5} = 12{,}6$

$\sigma = \sqrt{Var(X_n)} = \sqrt{12{,}6} = 3{,}5$

$$P(10 < X_n \leq 30) = P\left(\frac{10-m}{\sigma} < \frac{X_n - m}{\sigma} \leq \frac{30-m}{\sigma}\right) =$$

$$P\left(\frac{10-18}{3{,}5} < \frac{X_n - m}{\sigma} \leq \frac{30-18}{3{,}5}\right) = P\left(-2{,}2 < \frac{X_n - m}{\sigma} \leq 3{,}4\right) =$$

$$= \Phi(3{,}4) - \Phi(-2{,}2) = \underbrace{\Phi(3{,}4)}_{= 1} - (1 - \Phi(2{,}2))$$

$$1 - (1 - 0{,}9861) = 0{,}9861$$

2 N tot. biglie $= 500$ con 15 bianche

$P(X_n \leq 2)$

usiamo Poisson essendo $p = \frac{15}{500} << 1$

$\lambda = mp = \cancel{60} \cdot \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{500}_{5}} = \frac{9}{5} = 1{,}8$

$$P(X_n \leq 2) = P(X_n = 0) + P(X_n = 1) + P(X_n = 2)$$

$$\parallel$$

$P(X_i = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$ $\quad e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda}{1} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} = e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\right)$

$$= e^{-1{,}8}\left(1 + 1{,}8 + \frac{1{,}8^2}{2}\right)$$

$$= 4{,}42\, e^{-1{,}8} = 0{,}73$$

es 2

$X \sim BinNeg(100, \frac{1}{3})$ 100 successo

a) maggiorare $P(X \geq 500)$ usando Markov

$$\boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}}$$

$p(k) = \binom{k-1}{h-1} p^h (1-p)^{k-h}$ = h successo alla k - prova

$$P(X \geq 500) \leq \frac{E[X]}{500} = \frac{\frac{h}{p}}{500} = \frac{\frac{100}{\frac{1}{3}}}{500} = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$$

b) maggiorare $P(X \geq 500)$ usando Chebshev

$$\boxed{P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} Var(X)}$$

$$P(|X - 300| \geq 500 - 300) = P(|X - 300| \geq 200) \leq \frac{1}{200^2} Var(X) =$$

$$\frac{1}{200^2} \cdot \frac{h(1-p)}{p^2} = \frac{100 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{200^2} = \frac{\cancel{200}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}\,3}{200^{\cancel{2}}} = \frac{3}{200} = 0{,}015$$

c) $X = \sum_{i=1}^{100} T_i$ con $T_i \sim Geom(\frac{1}{3})$

$E[T_i] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ $\quad Var(T_i) = \frac{1-p}{p^2} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = 3\sqrt{\frac{2}{3}}$

Per TCL $P\left\{ a \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - m) \leq b \right\} \longrightarrow \int_a^b e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$P(X \geq 500) = P(500 < X < +\infty)$

$\sqrt{n} = \sqrt{400} = 10$, $\sigma = 3\sqrt{2/3}$. $\bar{X}_n = \frac{X_n}{100}$ $\quad m = 3$

$$P\left\{ \frac{500}{100} < X_n < +\infty \right\} = P(5 < X_n < +\infty) = P(2 < X_n - m < +\infty) =$$

$$= P\left(\frac{2 \cdot 10}{\sqrt{6}} < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(X_n - m) < +\infty\right) = \int_{\frac{20}{\sqrt{6}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = 1 - \phi\left(\frac{20}{\sqrt{6}}\right) = 1 - \underbrace{\Phi(8{,}16)}_{\simeq 1} \simeq 0$$

FOGLIO 7

martedì 15 agosto 2023 15:28

Esercizio 1

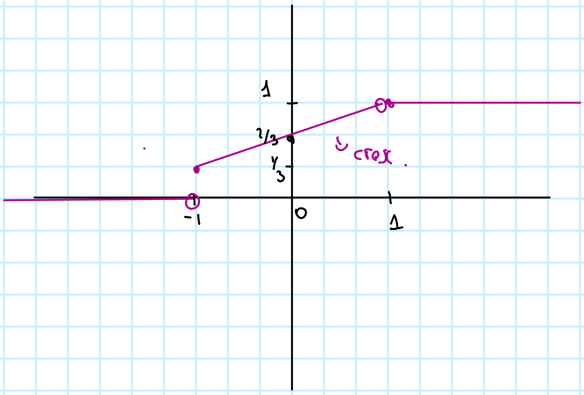
X v.a. con FdR $F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & \text{per } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$

a) Verificare che $F_X(x)$ e' una F.d.R

b) X e' discreta? Continua? Assolutamente continua?

c) Calcolare $P(X \geq 0)$, $P(X=0)$ e $P(X=-1)$

Soluzione



a) Per vedere se $F_X(x)$ e' F.d.R devo vedere che:

1) $F_X(x)$ e' non decrescente

sia $x \leq y \in X$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = P((-\infty, x]) \leq P((-\infty, y]) = P(X \leq y) = F_X(y)$

1° $0 \leq 0$ $\qquad$ 2° $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ che è crescente

3° $1 \leq 1$

$\underbrace{0 \leq \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}_{x \geq -2} \underbrace{\leq 1}_{}$

$\frac{1}{3}x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x \leq 1$

2) $F_X(x)$ e' continua a dx cioe' $\lim_{y \to x} F(y) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$F_X(x)$ e' continua tranne in -1 e in 1 però $\lim_{y \searrow -1} F(y) = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = F(-1)$

$\lim_{y \to 1} F(y) = \lim_{y \to 1} 1 = F(1) = 1$

3) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim_{x \to +\infty} F_X(1) = 1$ e $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad x < -1$

b) X è continua se p^X è cont. cioè $P(X=x)=p^X(x)=0\ \forall x$

X è ass. cont. se p^X è ass. cont $P(X\in A)=p^X(A)=\int_A f(x)\,dx$

non è discreta $\Rightarrow$ $P(X\in(-1,1))=\frac{2}{3}$

$$P(-1<X<1)=P(X>-1)\cap \underbrace{P(X<1)}_{=F(1)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1}=\frac{2}{3}$$

$\downarrow$

$1-P(X\leq -1)$

$1-F(-1)=1-\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$P(X=x)=F(x)-\lim_{z\nearrow x}F(z)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}-\left(\lim_{z\nearrow x}\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}\right)=0$$

$=$ già vista che è cont a dx

non è continua $p^X(-1)=P(X=-1)=F(-1)-\underbrace{\lim_{z\nearrow -1}F_X(z)}_{\text{sono nel 1° settore}}=\frac{1}{3}-0\neq 0$

$\Rightarrow$ non è ass. cont.

c) $P(X\geq 0)=1-P(X<0)=1-F_R(0)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$P(X=0)=\frac{1}{3}0+\frac{2}{3}-\lim_{z\nearrow 0}F_X(z)=\frac{2}{3}-\lim_{z\nearrow 0}\left(\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}\right)=0$ $\leftarrow$ $P(X=x)=0$ perché è cont.

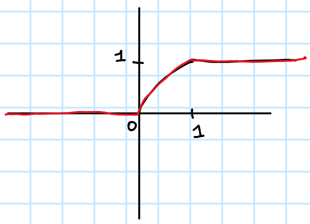
$P(X=-1)=\frac{1}{3}(-1)+\frac{2}{3}-\lim_{z\nearrow -1}F_X(z)=\frac{1}{3}-\lim_{z\nearrow 1}F_X(z)=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$

esercizio 2

$F_X(x)=\sqrt{x}\,\mathbb{1}_{0<x<1}+\mathbb{1}_{x\geq 1}$

Verificare X è ass. cont. e calcolare la densità

$$F_X(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{se } x\in(0,1)\\ 1 & \text{se } x\in[1,+\infty)\\ 0 & \text{se } x\in(-\infty,0]\end{cases}$$



$\downarrow$ derivo

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} & x\in(0,1)\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}\qquad \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbb{1}_{0<x<1}$$

$\hat{F}(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(z)$

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(z)\,dz=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2\sqrt{z}}\mathbb{1}_{0<z<1}=\left[\sqrt{z}\,\mathbb{1}_{0<x<1}\right]_{-\infty}^{x}=\begin{cases}\sqrt{x} & x\in(0,1)\\ * \ 1 & x\in[1,+\infty)\\ 0 & x\in(-\infty,0]\end{cases}$$

corrisp. a $F_X(x)$ $\Rightarrow$ F_X è a.c. con densità $f_X(x)$

* per $x\geq 1$ $\quad F(2)=\int_{-\infty}^{2}\frac{1}{2\sqrt{z}}\mathbb{1}_{0<z<1}=\underbrace{\int_{-\infty}^{1}}_{=F(1)=1}+\int_{1}^{2}0=1$

esercizio 4

X v.a. $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-(x-\lambda)} & x > \lambda \\ 0 & x \le \lambda \end{cases}$

a Per quali λ $f_X(x)$ è una densità di prob. e calcolare F.d.R.

è densità se: 1) $f \ge 0$ Leb-q.o

2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

1) $f \ge 0 \iff \lambda > 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-(x-\lambda)} dx = \int_{\lambda}^{+\infty} \lambda e^{-x} e^{\lambda} dx = \left[\lambda e^{\lambda} (-e^{-x})\right]_{\lambda}^{+\infty} = 0 - \left[\lambda e^{\lambda}(-e^{-\lambda})\right] = \lambda \to \lambda = 1$

$\lambda > 0$ e $x > \lambda$

$\square$

Quindi $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 1 \\ e^{-x+1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

In questo modo però non è cont. da dx cioè $\lim_{y \nearrow 1} f(y) = 0 \neq f(1) = 1$

Quindi $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ e^{-x} & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$

FdR $= \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_{\lambda}^{x} \lambda e^{-(y-\lambda)} dy = \left[-\lambda e^{\lambda} e^{-y}\right]_{\lambda}^{x} = -\lambda e^{\lambda} e^{-x} - (-\lambda) = \lambda(1 - e^{\lambda} e^{-x}) \overset{\lambda=1}{=} (1 - e^{-x+1})$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ 1 - e^{-x+1} & x > 1 \end{cases}$ ⚠ così non è cont da dx

$F(1) - \lim_{y \nearrow 1} f(y) = 0 \qquad 0 - (1 - e^{0}$

b) Posta $Y = e^X$ det. la legge di Y

$F_Y(y) = P(Y \le y) \overset{Y = e^X}{=} P(e^X \le y) = P(X \le \log(y)) = \begin{cases} 0 & \text{se } \log(y) < 1 \iff y < e \\ 1 - e^{1-\log(y)} = 1 - e\frac{1}{y} & \text{se } \log(y) \ge 1 \iff y \ge e \end{cases}$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{e}{y^2} \mathbb{1}_{[e,+\infty)}(y) & \text{se } y \ge e \\ 0 & \text{se } y < e \end{cases}$

c) $P(Y < 2)$

$\parallel$

$F(Y < 2) = F(2^-) = \lim_{y \nearrow 2} F_Y(y) = 0$

$2 < e$

d) $E[Y]$, $E[Y^2]$, $Var(Y)$

$E[Y] = \int_{\mathbb{R}} y\, f_Y(y)\, dy$, ma $\int_e^{+\infty} |y|\, f_Y(y)\, dy = \int_e^{+\infty} |y| \frac{e}{y^2}\, dy = \int_e^{+\infty} \frac{e}{|y|} = +\infty$

$\Rightarrow$ non sono def

e) $P(X>3)$ $P(X^3>27)$

$P(X>3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3) = 1 - (1 - e^{1-3}) = + e^{-2}$

$= \int_3^{+\infty} e^{1-x}\, dx$

$P(X^3 > 27) = P(X > \sqrt[3]{27}) = P(X > 3) = e^{-2}$

f) media di $3X^2 - 1$

$E[3X^2 - 1] = 3E[X^2] - 1 = 3 \cdot 5 - 1 = 14.$

$E[X^2] = \int x^2 f_X(x)\, dx = \int_1^{+\infty} x^2 e^{1-x}\, dx = -x^2 e^{1-x} - \int -e^{1-x} 2x\, dx$

$= -x^2 e^{1} + 2\left[-x e^{1-x} + \int e^{1-x}\right] dx = -x^2 e^{1-x} + 2\left[-x e^{1-x} - e^{1-x}\right]$

$= \left[-e^{1-x}\left[x^2 + 2x + 2\right]\right]_1^{+\infty} = 0 - (-5) = 5$

g) $P(|X - E[X]| > 2) \overset{\text{Cheb.}}{\leq} \frac{Var(X)}{4} = \frac{\sigma^2}{4} = \frac{1}{4}$

$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 5 - (2)^2 = 1$

$E(X) = \int_1^{+\infty} x e^{1-x} = -x e^{1-x} + \int e^{1-x} = \left[-e^{1-x}[x+1]\right]_1^{+\infty} = 0 - (-2) = 2$

esercizio 5

$$f(x) = \begin{cases} c\,x\,e^{-x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

a) det. il valore di c

f e' una densita' $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$ e $f(x) \ge 0 \Rightarrow c > 0$

$$\int_0^{+\infty} c\,x\,e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2c\,x\,e^{-x^2} = \frac{1}{2}\int c\,e^{-t}\,dt = \left[-\frac{c}{2}\,e^{-t}\right]_0^{+\infty} =$$

$t = x^2 \quad dt = 2x$

$$= 0 - \left(-\frac{c}{2}\right) = \frac{c}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

b) Calcolare la f.d.R di R

$f(x) = F'(x)$

$$\int f(x) = \int F'(x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \int_{-\infty}^{x} 2x\,e^{-x^2} & \text{se } x \ge 0 \end{cases} \underset{x^2 = t}{=} \int_0^x e^{-z^2}\,dz = \left[-e^{z^2}\right]_0^x = -e^{-x^2} + 1$$

c) media e mediana di R

$$E[R] = \int x\,f(x) = \int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

mediana $P(X \le m) = P(X \ge m) = \frac{1}{2}$

$$F_R(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-x^2} \Rightarrow -\log(2) = -x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\log 2}$$

d) $P\{R > 2\} = 1 - P\{R \le 2\} = 1 - F_R(2) = 1 - \left(1 - e^{-2^2}\right) = e^{-4}$

e) la legge di X che vale $\begin{cases} 1 & \text{se } R < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$P(R < 2) = 1 \qquad P(R > 2) = 0$$
$$F_R(2) = 1 - e^{-4} \qquad e^{-4}$$

f) Supp che le particelle siano delle sfere

Calcolare $P(V > 1)$ con V volume

V sfera $\frac{4}{3}\pi R^3 \qquad P\left(\frac{4}{3}\pi R^3 > 1\right) = P\left(R^3 > \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\pi}\right)$

$$= P\left(R > \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\right) = 1 - P\left(R \le \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\right) = 1 - F_R\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}\frac{3}{\pi}}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{4}\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}\right) = e^{-\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

esercizio n°6

X v.a. su (Ω, A, P) con $X \geq 0$ q.o. e F_X F.d.R

Dim che $E[X] = \int_0^{\infty} P\{X > t\} dt = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt$

Sol

$$E[X] = \int_0^{+\infty} x f_X(x) \underset{f = F'}{=} \int_0^{+\infty} x \, F'_X(x) \, dx \underset{1' = 0}{=} \int_0^{+\infty} x \, (F_X(x) - 1)' \, dx$$

$$\underset{\text{parti}}{=} \underbrace{\left[x(F_X(x) - 1)\right]_0^{+\infty}}_{= 0} - \int_0^{+\infty} x'(F_X(x) - 1) \underset{x' = 1}{=} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot (F_X(x) - 1) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x)) = \int_0^{+\infty} P(X > x)$$

b) X non nec. ≥ 0 q.o. $\quad X$ e' int $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} P(X > t) < +\infty$ e $\int_{-\infty}^{0} P(X < t) < \infty$

X e' integ. $\Leftrightarrow$ $E[|X|] = E[X^+] + E[X^-] < +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) = \underbrace{\int_0^{+\infty} x \, f_X(x) dx}_{= P(X > x) \text{ pto preced.}} + \int_{-\infty}^{0} -x \, f_X(x) \, dx < +\infty$$

$$-\int_{-\infty}^{0} x(F(x))' = \underbrace{\left[-x F(x)\right]_{-\infty}^{0}}_{= 0} - \int_{-\infty}^{0} -F(x) = + \int_{-\infty}^{0} P(X < x)$$

$= E[X^+] + E[-X^-] =$

$$= \int_0^{+\infty} P(X^+ > x) dx + \int_0^{+\infty} P(-X^- > x) dx$$

$$\int_0^{+\infty} P(-X^- > x) dx = \int_0^{+\infty} P(X^- < -x) dx = \phi(-x)$$

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} P(X > x) dx}_{< +\infty} + \underbrace{\int_{-\infty}^{0} P(X < x)}_{< +\infty} < +\infty$$

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-] = \int_0^{+\infty} P(X > x) - \int_{-\infty}^{0} P(X < x)$$

$X = X^+ - X^- \quad , \quad |X| = X^+ + X^-$

es 7

$X \sim Exp(\lambda) \quad \lambda > 0 \qquad , \; Y = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, I_{(k-1,k]}(X) = \lceil X \rceil$

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$

$F\,dr = F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{x \geq 0}$

$$Y_i = \begin{cases} k & \text{se } y \in (k-1, k] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P(Y=k) = P(\lceil X \rceil = k) = \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{k-1}^{k} =$$

$$-e^{-\lambda k} - (-e^{-\lambda(k-1)}) = -e^{-\lambda k} + e^{-\lambda(k-1)} = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda}) = f_Y(k)$$

$$= (1-q)^{k-1} q \qquad q = (1 - e^{-\lambda}) \qquad Y \sim Geom(q) = Geom(1 - e^{-\lambda})$$

$Z = Y - X \qquad Z = \lceil X \rceil - X \Rightarrow$ Range $Z \in (0,1)$

F.d.R di Z $\quad P(Z = s) = P(Y - X = s) = P(Y = k, X = k - s) =$

$$f_Y(k)\, f_X(k-s) = e^{-\lambda}\left[e^{k-1}(1-e^{-\lambda}) + \lambda e^{k-s}\right]$$

$$\underset{e^{-\lambda(k-1)}(1-e^{-\lambda})}{\shortparallel} \qquad \underset{\lambda e^{-\lambda(k-s)}}{\shortparallel}$$

es. 8

(X,Y) vettore aleatorio

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \sum_{1}^{\infty} \frac{4xy}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{\theta}} \mathbb{1}_{(0,\infty) \times (0,x)}(x,y)$$

a) X e Y sono indip?

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

$$f_{(X,Y)}(3,5) = \sum_1 \frac{60}{\theta^2} e^{-\frac{9}{\theta}} \cdot 0 \neq f_X(3) \cdot f_Y(5) \Rightarrow \text{no indip.}$$

$$f_X(3) = \sum_{\substack{y \in Range_Y \\ [0,x] = Range(Y)}} f_{(X,Y)}(3,y) = \sum_{y=0}^{3} \frac{12y}{\theta^2} e^{-\frac{9}{\theta}} > 0$$

$$f_Y(5) = \sum_{\substack{x \in Range(X) \\ \shortparallel \\ (0,+\infty)}} f_{(X,Y)}(x,5) = \sum_{x=5}^{\infty} \frac{20x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{\theta}} > 0$$

però se $x < 5$ la $\mathbb{1}_{(0,+\infty)\times(0,x)}$ di $f_{(X,Y)}(x,5)$ è 0 $\Rightarrow \sum_1$ parte da 5

2) Calcolare le den. marg di (X,Y)

$$f_X(x) = \int_0^x f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = \int_0^x \frac{4xy}{\theta^2} e^{-x^2/\theta}\,dy = \frac{4x}{\theta^2} e^{-x^2/\theta} \int_0^x y\,dy = \frac{4x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{\theta}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x = \frac{2x^3}{\theta^2} e^{-x^2/\theta}$$

$$f_Y(y) = \int_y^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx = \int_y^{+\infty} \frac{4xy}{\theta^2} e^{-x^2/\theta}\,dx = \frac{2y}{\theta} \int_{y^2/\theta}^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-\frac{2y}{\theta} e^{-t}\right]_{y^2/\theta}^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{2y}{\theta} e^{-y^2/\theta}\right) = \frac{2y}{\theta} e^{-y^2/\theta}$$

$$t = \frac{x^2}{\theta}, \; dt = \frac{2}{\theta} x$$

$\triangle!$ $f_X(x) = \int_a^b$ con $[a,b] = \text{Range}(Y)$

$f_Y(y) = \int_a^b$ con $[a,b] = \text{Range}(X)$ range $X = [0,+\infty)$ ma in realtà è $[y,+\infty)$

3) Per $\theta = 1$ Calcolare $P(X>1, Y>1)$

$$\int_1^{+\infty}\int_1^{x} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \underbrace{\int_1^{+\infty}}_{\text{Range } X \to dx}\underbrace{\int_1^{x}}_{\text{range } y \to dy} 4xy\,e^{-x^2}\,dy\,dx = \int_1^{+\infty} 4xe^{-x^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^{x} dx$$

$$= \int_1^{+\infty} 4xe^{-x^2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right]dx = \underbrace{\int_1^{+\infty} 2x^3e^{-x^2}\,dx}_{A} - \int_1^{+\infty} 2xe^{-x^2} = \frac{1}{e}$$

$$\int_1^{+\infty} 2xe^{-x^2} = \left[-e^{-t}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{e}$$

$$A \underset{x^2=t}{=} \int_1^{+\infty} e^{-t}\,t\,dt = \left[-e^{-t}t + -e^{-t}\right]_1^{+\infty} = 0 - \left[-\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right] = 0$$

4) Per $\theta = 1$ Calcolare $E[X/Y] = E\left[\frac{X}{Y}\right]$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{x} \frac{x}{y} f_{(x,y)}(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{+\infty}\int_0^{x}\frac{x}{y}\,4xy\,e^{-x^2}\,dy\,dx = \int_0^{+\infty} 4x^2e^{-x^2}\cdot x\,dx =$$

$$2\int_0^{+\infty} 2x^3e^{-x^2} \underset{t=x^2}{=} 2\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,dt = 2\left[-t\,e^{-t} - e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 2(0+1) = 2$$

es 9

es 9

Siamo $X_1, \dots, X_n$ v.a. indip. con densità $f_1, \dots, f_n$ e $F_1, \dots, F_n$ F.d.R.

a) Calcolare la F.d.R. e la densità di $U = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

$W = \min\{X_1, \dots, X_n\}$

b) Considerare $f_1 = \dots = f_n = f$ e in particolare f è

la densità di una v.a. uniforme su $(0,1)$

la densità di una v.a. esponenziale $\lambda > 0$

Soluzione

Essendo $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$ per $i \neq j$ si ha $F(x_1 \dots x_n) = F_1(x_1) \dots \dots F_n(x_n)$

Se tutte le $X_i \leq x \Rightarrow$ anche $\max\{X_i\} \leq x$

$F_U(x) = P(U \leq x) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \overset{\text{indipend}}{=}$

$P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \dots \cdot P(X_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x) \underset{f_1 = \dots = f_n = f}{=} [F_{X_1}(x)]^n$

$f_U(x) = F_U'(x) = \frac{d}{dx} F_U(x) = \frac{d}{dx}[F_{X_1}(x)]^n = n[F_{X_1}(x)]^{n-1} F_{X_1}'(x) = n[F_{X_1}(x)]^{n-1} f_{X_1}(x)$

se $f_1 = \dots = f_n = f$

F.d.R del max $\rightsquigarrow$ $\prod_{i=1}^{n} F_i(x) = [F_{X_1}(x)]^n$

f del max $\rightsquigarrow$ $n[F_{X_1}(x)]^{n-1} f_{X_1}(x)$

A me serve solo che il $\min\{X_i\}$ sia $\leq x$ quindi se $\min\{X_i\} = X_1$

a me serve solo $X_1 \leq x$ e gli altri possono essere sia $> x$ e sia $< x$

$F_W(x) = P(W \leq x) = P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq x) = 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) =$

$1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x)$

$= 1 - P(X_1 > x) \dots P(X_n > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = 1 - (1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i < x))$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(X_i \leq x)) = 1 - (\prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(x))) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n$

punto di prima + $f_1 = \dots = f_n = f$

$f_W(x) = F_W'(x) = \frac{d}{dx}(1 - (1 - F_{X_1}(x))^n) = n(1 - F_{X_1}(x))^{n-1}(+F_{X_1}'(x))$

$= n(1 - F_{X_1}(x))^{n-1} F_{X_1}'(x) = (1 - F_{X_1}(x))^{n-1} n \cdot f_{X_1}(x)$

FdR min $1 - (1 - F_{X_1}(x))^n$ f min. $(1 - F_{X_1}(x))^{n-1} n \cdot f_{X_1}(x)$

b1) unif su $(a,b) = B(a,b)$

$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$ F.d.R $F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$

nel mio caso $a=0$ $b=1$

$f(x) = 1 \, \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$

$\begin{cases} f_u(x) = n x^{n-1} \\ f_w(x) = n(1-x)^{n-1} \end{cases}$ per x in $(0,1)$

b2)

$\mathcal{E}xp(\lambda)$

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$ F.d.R $F(x) = (1-e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{x \ge 0}$

$f_u(x) = \underbrace{n(1-e^{-\lambda x})^{n-1}}_{n(F(x)^{n-1})} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{f(x)}$

$f_w(x) = n(1-(1-e^{-\lambda x}))^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} = n(e^{-\lambda x})^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} = n\lambda (e^{-\lambda x})^n \sim Exp(n\lambda)$

esercizio 10

Per quali valori dei parametri le seguenti sono F.d.R?

Per quali valori sono continue? ass continue?
$\downarrow$
det. la densità.

a) $F(x) = \lambda\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $F(x) = a e^{\lambda x} \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + \left(b - c e^{-\lambda x}\right) \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$ con $\lambda > 0$

F.d.R se 1) non decrescente e non neg.
2) cont. da dx
3) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

1) $\underbrace{\lambda \frac{1}{1+x^2}}_{F'} \geq 0 \iff \lambda > 0$

voglio sia 1

3) $\lim_{x\to+\infty} \lambda\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = \lambda\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \lambda\pi \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\pi}$

$\lim_{x\to-\infty} \lambda\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = \lambda\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

2) è continua a dx perchè lo è arctan

cont, ass cont.

è continua perchè lo è arctan $\Rightarrow \frac{1}{\pi}\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)$ lo è

ass continua $\overset{\text{si}}{\Rightarrow}$ $f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)}$ è la densità corrisp a F.

b)

$$F(x) = \begin{cases} a e^{\lambda x} & x < 0 \\ b - c e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

3 $\lim_{x\to+\infty} F(x) = b \Rightarrow b=1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

crescente

1) $\begin{cases} x \in (-\infty, 0) & F'(x) = \lambda a e^{\lambda x} \geq 0 = \boxed{a \geq 0} \\ x \in [0, +\infty) & F'(x) = c\lambda e^{-\lambda x} \geq 0 \quad \boxed{c \geq 0} \end{cases}$

non negativa

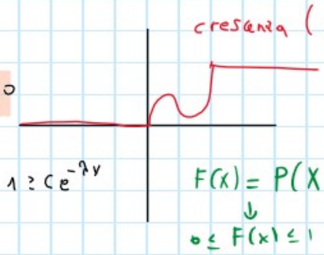
$a e^{\lambda x} \geq 0 \iff \boxed{a \geq 0}$

$\underset{1}{b} - c e^{-\lambda x} \geq 0 \iff$

$1 - c e^{-\lambda x} \geq 0 \quad 1 \geq c e^{-\lambda x}$

$\Rightarrow \boxed{c \leq 1}$

crescenza (per monotonia della prob)



$F(x) = P(X \leq x)$
$\downarrow$
$0 \leq F(x) \leq 1$

2) pti di disc. in $x=0$

$\lim_{x\to0^-} F(x) = \lim_{x\to0^-} a e^{\lambda x} = a$

$\lim_{x\to0^+} F(x) = \lim_{x\to0^+} b - c e^{-\lambda x} = b - c \overset{b=1}{=} 1 - c$

$\boxed{a \leq 1-c}$

$\Rightarrow b = 1, \quad 0 \leq a \leq 1-c, \quad 0 \leq c \leq 1$

Esercizio n° 11

Siano X, Y v.a reali indip. con $X \sim U([0,1])$
Y ass. cont. con $f_Y(y) = 2y \, 1\!\!1_{(0,1)}(y)$

a) $P\{X > \frac{1}{2}, y > \frac{1}{2}\}$
b) $P\{X^2 > y\}$
c) $P\{X > \frac{1}{2}, x+y < 1\}$
d) $E[\frac{X^2}{Y}]$

$X \sim U([0,1])$ $\quad f_X(x) = 1 \cdot 1\!\!1_{0 \le x \le 1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$F_Y'(y) = f_Y(y) \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f_Y(y) = F_Y(y)$

$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{se } y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\int f_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} 2y \, 1\!\!1_{0<y<1} \, dy = \left[y^2 \, 1\!\!1_{0<y<1} \right]_{-\infty}^{y} = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ y^2 & \text{se } 0 < y < 1 \\ 1 \, * & \text{se } y > 1 \end{cases}$ posso mettere x al posto di y

$*$ es $y=2$ $\int_{-\infty}^{y} = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{y} 2y \, 1\!\!1_{0<y<1}$

$\int_{-\infty}^{0} 0 = 0$, $\quad \int_{0}^{y} 2y \, 1\!\!1_{0<y<1} = \int_0^1 2y + \int_1^y$, $\quad \int_0^1 2y = [y^2]_0^1 = 1$, $\quad \int_1^y = 0$

a)

$P(X > \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}) \overset{\text{indip.}}{=} P(X > \frac{1}{2}) P(Y > \frac{1}{2}) = (1 - P(X \le \frac{1}{2}))(1 - P(Y \le \frac{1}{2}))$

$= (1 - F_X(\frac{1}{2}))(1 - F_Y(\frac{1}{2})) = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$F_X(x) = x \quad F_Y(y) = y^2$
per $x, y \in [0,1]$

b)

$P(X^2 > y) = \int_0^1 \int_0^{x^2} f_{XY}(x,y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} 2y \, dy dx = \int_0^1 x^4 \, dx = \frac{1}{5}$

$f_{XY}(x,y) \overset{\text{indip}}{=} f_X(x) f_Y(y) = 1 \cdot 2y \, 1\!\!1_{0 \le y \le 1}$

c)

$P(X > \frac{1}{2}, X+Y < 1) = P(X > \frac{1}{2}, Y < 1 - X)$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_0^{1-x} f_{XY}(x,y) \, dy \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_0^{1-x} 2y \, dy \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)^2 \, dx = \left[\frac{-(1-x)^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 0 - (\frac{-1}{24}) = \frac{1}{24}$

d)

$E[\frac{X^2}{Y}] \overset{\text{indip}}{=} E(X^2) \cdot E(\frac{1}{Y}) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot \int_0^1 \frac{1}{Y} \cdot 2y \, dy = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

FOGLIO 8

mercoledì 16 agosto 2023 19:25

ESERCIZIO 1

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si dim che $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ se $a \neq 0$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$

$\varphi^{-1}(y) = x \quad y = \varphi(x)$

$\varphi(x) = ax + b = y \qquad |D\varphi^{-1}(y)| = \frac{1}{|a|} \qquad x = \frac{y-b}{a}$ der è $\frac{1}{|a|}$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2/2\sigma^2} \frac{1}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a\sigma^2}} e^{-(y-(b+\mu a))^2/2\sigma^2 a^2} \sim \mathcal{N}(b+\mu a, a^2\sigma^2)$$

es 2

$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ Legge di

$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$F_{Z^2}(z) = P(Z^2 < z) = P(\sqrt{z} < Z < \sqrt{z}) = \phi(\sqrt{z}) - \overbrace{\phi(-\sqrt{z})}^{1-\phi(\sqrt{z})} = 2\Phi(\sqrt{z}) - 1$$

$$\Rightarrow f_{Z^2}(z) = F'_{Z^2}(z) = \frac{d}{dz}(2\Phi(\sqrt{z}) - 1) = 2\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\sqrt{z}} \phi(y)\,dy = 2\phi(\sqrt{z}) \cdot \frac{d}{dz}(\sqrt{z}) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{z}}$$

es 3

$X \sim U((0,1))$ Per quali α $\quad Y = (1-X)^{-\alpha} \in L^1$?

$Y \in L^1 \iff \int_{\mathbb{R}} |f_Y(y)|\,dy < +\infty$

$f_X(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{0<x<1} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

Uso cambio di var per trovare $f_Y(y)$

$y^{-\frac{1}{\alpha}} = (1-x) \quad \Rightarrow \varphi^{-1}(y) = x = 1 - \frac{1}{\sqrt[\alpha]{y}} = 1 - y^{-\frac{1}{\alpha}}$

$\varphi^{-1}(y) = x \qquad dx = |\det D\varphi^{-1}(y)|\,dy$

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y))\,|\operatorname{Det} D\varphi^{-1}(y)| =$$

$$f_X(1 - y^{-\frac{1}{\alpha}})\left|\frac{dx}{dy}\right| = \mathbb{1}_{0<x<1}(1 - y^{-1/\alpha})\left|\frac{d}{dy}(1 - y^{-1/\alpha})\right|$$

$$= \mathbb{1}_{0<x<1}(1 - y^{-1/\alpha})\left|\left(-\frac{1}{\alpha} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)\right|$$

$$= \mathbb{1}_{(0,1)}(1 - y^{-1/\alpha})\frac{1}{|\alpha|} y^{-(1+\frac{1}{\alpha})}$$

Range $(Y) = \begin{cases} [0,1] & \text{se } \alpha > 0 \\ \{1\} & \alpha = 0 \\ [1, \infty) & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

$y = (1-x)^{-\alpha} = \frac{1}{(1-x)^\alpha}$

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{(0,1)}(y)\,\frac{1}{\alpha}\,(1-x)^{\alpha+1} = \mathbb{1}_{(0,1)}\frac{1}{\alpha}\,y^{-(1+\frac{1}{\alpha})}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,\frac{1}{\alpha}\,(1-x)^{\alpha+1} & \alpha>0 \\ (y-1) & \alpha=0 \\ \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(y)\,\frac{1}{|\alpha|}\,y^{-(1+\frac{1}{\alpha})} & \alpha<0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y\,\frac{1}{\alpha}\,y^{-(x+\frac{1}{\alpha})} = \int_0^1 \frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{y^{1/\alpha}} < +\infty \iff \frac{1}{\alpha}<1 \quad 1<\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\,(y-1)\,dy \circledast{=} 1 \qquad \alpha=0$$

regole F.d.r.

$\alpha<0 \quad -\beta=\alpha$

$$\int_1^{+\infty} y\,\frac{1}{|-\beta|}\,y^{-(x+\frac{1}{\beta})}\,dy = \int_1^{+\infty}\frac{1}{|-\beta|}\,y^{\frac{1}{\beta}} = +\infty$$

$$\left[y^{\frac{1}{\beta}+1}\right]_1^{+\infty}$$

$Y\in L^1 \iff \alpha\in\{0\}\cup\{1,+\infty\}$

es 5

X v.a è di Cauchy se ha densità $p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

1A Verificare che p è densità di probabilità
1B Scrivere F.d.R associata
1C $E[X]$
1D $Var(X)$

2A Calcolare la legge $Y=X^2$.
2B $E[Y]$

3A Verifica che $Z=\frac{1}{X}$ è ben posta
3B Calcola la legge di Z
3C $E[Z]$
3D $Var(Z)$

1a) p è densità se (i) $\int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx = 1$

(ii) $p\geq 0$

(ii) $p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\geq 0 \quad \forall x$ ok

(i) $$\int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\arctan(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1 \quad \text{ok}$$

Quindi p è densità di Prob.

1b) FdR $\quad F_X'(x)=f_X(x) \Rightarrow F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} p_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\arctan(x)\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)$$

1C $$E[|X|] = \int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,p_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2|x|}{(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\log(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = +\infty \Rightarrow \text{non converge}$$

1D

$\Rightarrow E[X]$ non è def $\Rightarrow$ $Var(X)$ non è def.

2A $Y = X^2$ $\quad f_Y(y) \longrightarrow$ cambio di var.

$\varphi^{-1}(y) = x \qquad x = \pm\sqrt{y} \qquad dx = |\det D\varphi^{-1}(y)|dy$

φ non è invert. su tutto $\mathbb{R} \Rightarrow$ spezzo dom in $(-\infty, 0)$ e $[0, +\infty)$

$\varphi_1^{-1}(y) = \sqrt{y} \qquad \varphi_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

$$f_Y(y) = f_X(\varphi_1^{-1}(y))\,|\det D\varphi_1^{-1}(y)| + f_X(\varphi_2^{-1}(y))\,|\det D\varphi_2^{-1}(y)| =$$
$$= f_X(\varphi^{-1}(y))\left|\frac{dx}{dy}\right| + f_X(\varphi_2^{-1}(y))\left|\frac{dx}{dy}\right| =$$
$$= P_X\left|\frac{d}{dy}(\sqrt{y})\right| + P_X\left|\frac{d}{dy}(-\sqrt{y})\right| =$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+y)}\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+y}\right)\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{\pi(1+y)}\left(\frac{2}{2\sqrt{y}}\right) = \frac{1}{\pi(1+y)(\sqrt{y})}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2B $$E[|Y|] = \int_{\mathbb{R}} |y|\, f_Y(y) = \int_0^{+\infty} y \frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{1+y} \sim \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}} = +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,dy = 0$$

$\Rightarrow E[Y]$ non è def.

3A $Z = \frac{1}{X} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{z}$

$\varphi(x) = z = \frac{1}{x} \Rightarrow \varphi^{-1}(x) = \frac{1}{z}$

3B $$f_Z(z) = f_X(\varphi^{-1}(z))\,|\det D\varphi^{-1}(z)|$$
$$= f_X(\varphi^{-1}(z))\left|\frac{dx}{dz}\right|$$
$$= \frac{1}{\pi(1+\frac{1}{z^2})}\left|\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \frac{z^2}{\pi(z^2+1)}\left|-\frac{1}{z^2}\right| = \frac{1}{\pi(z^2+1)}$$

3C
$$E[|Z|] = \int_{\mathbb{R}} |z|\, f_Z(z)\, dz = \int_0^{+\infty}\frac{z}{\pi(z^2+1)} = \frac{1}{2\pi}\log(z^2+1)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$$

$\Rightarrow \nexists E[Z] \Rightarrow \nexists \mathrm{var}(Z)$

es 4

$X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d. $X_i \sim Exp(\lambda)$

Calcolare la legge di $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Legge di X_i $\quad f_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$

$\quad F_{X_i}(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{x \geq 0}$

claim $Y_k = \sum_{j=1}^{k} X_j \sim \Gamma(k, \lambda)$

$k=1 \quad Y_1 \sim$ Geom $(\lambda) = \Gamma(1, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$

$X_1 + \dots + X_n = Z_n \underset{\text{Teorema}}{\sim} \Gamma(n, \lambda)$

$$f_{Z_n}(z) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$$

ES 6

X, Y v.a. indip.
$X \sim Exp(\lambda)$
$Y \sim Exp(\mu)$

$Z = X + Y$
$W = \alpha X \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Calcolare densità e F.d.R di Z e W

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$

$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{x \geq 0}$

$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y)$

$F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda y}) \mathbb{1}_{y \geq 0}$

X, Y indip $\Rightarrow$ dalle leggi marginali ricavo le leggi congiunte

$$Z = X + Y \quad \Rightarrow \quad y = z - x$$

$$f_{(X+Y)}(z) = \int_0^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, z-x) \underset{Y \perp\!\!\!\perp X}{=} \int_0^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) =$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{-\mu(z-x)} = \lambda\mu \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x - \mu z + \mu x} = \lambda\mu \int_0^{+\infty} e^{x(-\lambda+\mu) - \mu z} =$$

$$= \lambda\mu e^{-\mu z} \left. \frac{e^{-x(+\lambda-\mu)}}{(-\lambda+\mu)} \right|_0^z = \frac{\lambda\mu e^{-\mu z}}{\mu - \lambda} \left[e^{-z(\lambda-\mu)} - 1 \right] = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} \left[e^{\cancel{-\mu z} + \cancel{\mu z} - z\lambda} - e^{-\mu z} \right] =$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} \left(e^{-z\lambda} - e^{-\mu z} \right) & \text{se } z > 0 \\ 0 & \text{altr.} \end{cases}$$

$$W = \alpha X \qquad x = \frac{w}{\alpha} \qquad \varphi^{-1}(w) = x = \frac{w}{\alpha}$$

$$\varphi_W(w) = \varphi_X(\varphi^{-1}(w)) \left| \frac{dx}{dw} \right| = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \frac{w}{\alpha}} \cdot \dfrac{1}{\alpha} & \text{se } w > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{w} \lambda e^{-\frac{\lambda w}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} = \left[\frac{\lambda}{\alpha} \left(-e^{-\lambda w/\alpha} \right) \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \right]_{-\infty}^{w} = -e^{-\frac{\lambda}{\alpha} w}$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} \left(e^{-z\lambda} - e^{-\mu z} \right) = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} \left[e^{-z\lambda} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{\mu} e^{-\mu z} \right]_{-\infty}^{z} = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-z\lambda} + \frac{1}{\mu} e^{-\mu z} \right]$$

es 7

(X, Y) coord cart.
(R, θ) coord polari

X, Y indip
$X \sim N(0,1)$
$Y \sim N(0,1)$

a Trovare $f_{R^2}(r)$, $f_\theta(x)$, $f_R(r)$, $R\,\theta$ indip.

b Calcolare $E\left[\frac{X^2}{R^2}\right]$

c $E\left[\frac{\min(|X|,|Y|)}{\max(|X|,|Y|)}\right]$

a) $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ idem y.

$X = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

X, Y indip $\Rightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \, dx\,dy =$

coor. polari

$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} \, r \, dr\, d\theta$
↳ Jacobiano

$\Rightarrow f_{R,\theta} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} = f_R(r)\, f_\theta(\theta) \Rightarrow R, \theta$ indip.

$f_R(r) = r \cdot e^{-\frac{1}{2}r^2}$, $f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{(0,2\pi)}$, $R \geq 0$

b) $E\left[\frac{X^2}{R^2}\right] = E\left[\frac{R^2\cos^2\theta}{R^2}\right] = E[\cos^2\theta] = \int_{\mathbb{R}} \cos^2\theta \cdot f_{R,\theta}(r,\theta) =$

$= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot f_R(r) \cdot f_\theta(\theta) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot \frac{1}{2\pi} \, d\theta\, dr =$

$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\, dr = \frac{1}{2}\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$

c) $V = \min\{|X|, |Y|\}$
$W = \max\{|X|, |Y|\}$

$E\left[\frac{V}{W}\right] = E\left[\frac{R\min(|\cos\theta|, |\sin\theta|)}{R\max(|\cos\theta|, |\sin\theta|)}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} r\, dr \int_0^{2\pi} \frac{\min(|\cos\theta|, |\sin\theta|)}{\max(|\cos\theta|, |\sin\theta|)} \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\theta$

→ tolgo il modulo ⇒ ho $4\int_0^{\pi/2}$

$= \int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} r\, dr \; \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\min(\cos\theta, \sin\theta)}{\max(\cos\theta, \sin\theta)} =$ → separo $\int_0^{\pi/2} = \int_0^{\pi/4} + \int_{\pi/4}^{\pi/2}$

max cos   max sin

$= \int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} r\, dr \cdot \frac{4}{2\pi}\left[\underbrace{\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\, d\theta}_{A} + \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, d\theta}_{B}\right]$

$A = \int_0^{\pi/4} \tan\theta \, d\theta = \left[-\log(\cos\theta)\right]_0^{\pi/4} = -\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\log\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log(2)$

$B = \left[\log(\sin\theta)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = 0 - \log\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\log(2)$

$\Rightarrow \frac{4}{2\pi}(A + B) = \frac{2}{\pi}\log(2)$

$\Rightarrow \frac{2\log(2)}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} r\, dr = \frac{2\log(2)}{\pi}$

esercizio 8

$p(x) = c x^{\mu} \mathbb{1}_{0<x<1} \quad \mu \in \mathbb{R}$

a) deter. μ affinché p sia integr. su $\mathbb{R}$.

b) Per i valori di μ sopra, trovare c affinché p sia dens. di prob.

c) X v.a con $f_X(x) = p(x)$ e $\mu = 1$. Calcolare $f_Y(y)$ con $Y = X^2+1$

d) X, Y indip. $f_X(x) = p(x)$ e $\mu = 1$, $Y \sim Exp(1)$. Calcolare la legge di $X+Y$

a) p è integr su $\mathbb{R}$ se $\int_{\mathbb{R}} |p(x)|\, dx < +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c x^{\mu} \mathbb{1}_{0<x<1}\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^1 c x^{\mu} \cdot 1\, dx + \int_1^{+\infty} 0 =$$

$$c \int_0^1 x^{\mu} \cdot 1\, dx = c \int_0^1 \frac{1}{x^{-\mu}}\, dx < +\infty \iff -\mu < 1 \iff \mu > -1$$

b) p è densità se $p \geq 0$ Leb-q.o

$\int_{\mathbb{R}} p(x)\, dx = 1$

$$\text{Per } \mu > -1 \Rightarrow p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c x^{\mu} \mathbb{1}_{(0,1)} = c \int_0^1 x^{\mu}\, dx = \left[\frac{c}{\mu+1} x^{\mu+1} \right]_0^1 = \frac{c}{\mu+1}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\mu+1} = 1 \iff c = \mu+1$$

$$p(x) \geq 0 \iff c x^{\mu} \cdot \Rightarrow c \geq 0$$

c) X con $f_X(x) = c x \mathbb{1}_{(0,1)} \underset{\substack{\downarrow \\ c = \mu+1 \text{ e } \mu = 1}}{=} 2x \mathbb{1}_{(0,1)}$

cambio di var.

$Y = X^2 + 1 \Rightarrow X = \pm\sqrt{Y-1}$

$\varphi^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$ se sono in $\mathbb{R}^+$

$\varphi^{-1}(y) = -\sqrt{y-1}$ se sono in $\mathbb{R}^-$

$$f(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot |\det D\varphi^{-1}(y)| =$$

$$= 2\sqrt{y-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{y-1}} \cdot \frac{1}{2} \mathbb{1}_{(0,1)}(\sqrt{y-1}) + -2\sqrt{y-1} \left| \frac{1}{-2} \frac{1}{\sqrt{y-1}} \right| \mathbb{1}_{(0,1)}(-\sqrt{y-1})$$

$$= \mathbb{1}_{(0,1)}(\sqrt{y-1}) - \underbrace{\mathbb{1}_{(0,1)}(-\sqrt{y-1})}_{\substack{= \\ 0 \text{ perché } 0 < -\sqrt{y-1} < 1 \\ \nexists}} = \mathbb{1}_{(0,1)}(\sqrt{y-1}) = \mathbb{1}_{(1,2)} \sqrt{x^2+1-1} = \mathbb{1}_{(1,2)}(x)$$

$\downarrow$

$y = x^2+1$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 2$

d $f_X(x) = 2x \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $f_Y(y) = 1\, e^{-y} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y)$

Indip $\Rightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$Z = X+Y \Rightarrow Y = Z - X$

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2x \cdot \mathbb{1}_{0<x<1}(x)\, e^{-(z-x)} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(z-x) =$$

$z - x > 0 \iff z > x$

$$= \int_0^1 2x\, e^{-(z-x)} \mathbb{1}_{(x,+\infty)} = \int_0^1 2x\, e^{-z} e^{x} \mathbb{1}_{(x,+\infty)}(z) = 2e^{-z} \underbrace{\int_0^1 x e^{x}}_{\substack{= \\ [x e^x - e^x]_0^1 = 1}} = 2e^{-z} \mathbb{1}_{(x,+\infty)}(z)$$

es 9 maree (c)

(X,Y) v.a su $\mathbb{R}^2$ $\qquad f_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{x^3y^2}\mathbb{1}_{\{x>1,\, y>x\}}$

a) $P[Y < 2X]$

b) $U = \log X$ e $V = \frac{X}{Y}$ calcola $f_{U,V}(u,v)$ e $f_U(u)$ e $f_V(v)$

c) $Z = X+Y$ $\qquad f_{X+Y}(z) = f_Z(z)$

$$f_X(x) = \int_{Range(y)} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^{+\infty} \frac{3}{x^3y^2}\,dy = \frac{3}{x^3}\int_x^{+\infty}\frac{1}{y^2} = \frac{3}{x^3}\left[-\frac{1}{y}\right]_x^{+\infty} = \frac{3}{x^3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{3}{x^4}$$

$$f_Y(y) = \int_{Range(x)} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{3}{x^3y^2}\,dy = \frac{3}{y^2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,dx = \frac{3}{y^2}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_1^{+\infty} = \frac{3}{2}\frac{1}{y^2}$$

a)

$$P(Y < 2X) = \int_1^{+\infty}\int_{2X}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_1^{+\infty}\int_{2X}^{+\infty}\frac{3}{x^3y^2}\,dy\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{3}{x^3}\left[-\frac{1}{y}\right]_{2X}^{+\infty} dx =$$

$$\int^{+\infty}\frac{3}{2}\frac{1}{x^4}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_1^{+\infty} = +\frac{1}{2}$$

$U = \log(x) \qquad x = e^U$

$V = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x = V\cdot y = \varphi^{-1}(x)$

$\varphi^{-1}(y) = \frac{x}{v} = \frac{e^u}{v}$

$$\varphi(x,y) \longrightarrow \left(e^u, \frac{e^u}{v}\right)$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(\varphi^{-1}(x,y))\,\underbrace{|\mathrm{Det}\,D\varphi^{-1}(x,y)|}$$

$$= \frac{3}{e^{3u}\frac{e^{2u}}{v^2}} \qquad \left|\begin{pmatrix}\frac{de^u}{du} & \frac{de^u}{dv}\\ \frac{d\frac{e^u}{v}}{du} & \frac{d\, e^u/v}{dv}\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{-e^u e^u}{v^2}\right| = \left|-\frac{e^{2u}}{v^2}\right|$$

$$= \frac{3v^2}{e^{5u}}\cdot\frac{e^{2u}}{v^2} = \frac{3}{e^{3u}}\underbrace{\mathbb{1}_{(1,+\infty)}}_{}(e^u)\,\mathbb{1}_{(e^u,+\infty)}\left(\frac{e^u}{v}\right) = \frac{3}{e^{3u}}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}{}^{u}\,\mathbb{1}_{(0,1)}(v)$$

$e^u > 1$ $\qquad \frac{e^u}{v} > e^u > 1 \Rightarrow 1 > v \Rightarrow 0 < v < 1$

$e^u > e^0 \Rightarrow u > 0$

$\mathbb{1}_{(0,+\infty)}$

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v) = \int_0^1 \frac{3}{e^{3u}}\mathbb{1}_{(0,+\infty)} = \frac{3}{e^{3u}}$$

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v) = \int_0^{+\infty}\frac{3}{e^{3u}}\mathbb{1}_{(0,1)} = 3\cdot\left[-\frac{1}{3}e^{-3u}\right]_0^{+\infty} = \mathbb{1}_{(0,1)}V$$

$z = x+y$

c) $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3}{x^3(z-x)^2}\mathbb{1}_{x>1,\, z-x>x}\,dx$$

$x < \frac{z}{2}$

$$= \int_1^{z/2}\frac{3}{x^3(z-x)^2}\,dx = 3\left(z - \frac{2}{(z-1)} - \frac{8}{z} + 4 + 6\log\left(1-\frac{z}{2}\right)\right)$$

FOGLIO 8 STATISTICA

sabato 19 agosto 2023 13:31

10. Si consideri la densità di probabilità data da

$$f_X(x) = \frac{\theta}{x^2}\mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x),$$

con $\theta > 0$. Si proponga un opportuno stimatore per θ basato su un campione casuale $X_1, X_2, \dots, X_n$ estratto da una popolazione di densità f_X.

(a) Stabilire se lo stimatore proposto è corretto.

(b) Stabilire se la successione di stimatori proposta, al variare della numerosità del campione è consistente.

(c) Utilizzare lo stimatore trovato per determinare intervalli di fiducia al livello $1-\alpha$ per il parametro θ.

Formula per trovare lo stimatore

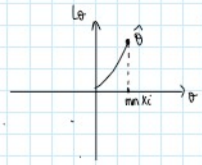
$\hat\theta = \max L_\theta$

$L_\theta = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$

$$L_\theta = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{x_i^2}\mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x_i) = \theta^n\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}\right)\left(\prod \mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x_i)\right) \underset{\forall x_i \geq \theta \Rightarrow \min(x_i)\geq\theta}{=} \theta^n \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}\prod \mathbb{1}_{\theta\leq\min(x_i)}(x_i) \underset{\mathbb{1}\text{ la voglio in f. di }\theta\text{ (serve per }\hat\theta)}{=} \theta^n\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}\prod\mathbb{1}_{(0,\min(x_i)]}(\theta)$$

è una costante i valori x_i sono fissati, il valore che massimizza e' il min. es $\frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \frac{1}{16}$

$\boxed{\hat\theta = \min_i (x_i)}$



$L_\theta = \theta^n \prod \frac{1}{x_i^2}\mathbb{1}_{(0,\min(x_i))}(\theta)$

cioè tra $[-\infty, 0]$ $L_\theta = 0$

$(0, \min(x_i)]$ $L_\theta = \theta^n / x_i^2$

$(\min(x_i), +\infty)$ $L_\theta = 0$

meno o e non $-\infty$ perchè $\theta > 0$ per hp

a) Formule per stimatore Corretto

$E[\hat\theta] = \theta$

$E[\hat\theta] = \int_{\mathbb{R}}$

Ricordo l'es 9 foglio 7 $f_{\min X_i}(x) = n f_{X_1}(x)\cdot(1-F_{X_1}(x))^{n-1}$

$F = \int f = \left[-\frac{\theta}{x}\right]$

$$E[\hat\theta] = E[\min(X_i)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\min X_i}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{\theta}{x^2}\mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x)\, n\left(1-\frac{\theta}{x}\right)^{n-1} \underset{\cancel{\int_{-\infty}^{\theta}}+\int_\theta^{+\infty}}{=} \int_\theta^{+\infty}\frac{\theta}{x}\cdot n\left(1-\frac{\theta}{x}\right)^{n-1}\mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}\,dx \sim \int_\theta^{+\infty}\frac{\theta n}{x} = +\infty \neq \theta$$

armonica

oppure

$\int\frac{n\theta}{x}\left(-\frac{\theta}{x}\right)^{n-1} + \int\frac{n\theta}{x} \sim \int n\left(\frac{\theta}{x}\right)^n + \int\frac{n\theta}{x}$

$\int\frac{1}{x^n}$ per $n>1$ converge $\quad\int\frac{1}{x}$ diverge

Quindi $E[\hat\theta] = +\infty \neq \theta \Rightarrow$ $\boxed{\hat\theta \text{ non è Stimatore Corretto}}$

b) STIMATORE CONSISTENTE

$\lim_n P\{|\hat\theta-\theta|>\varepsilon\} = 0$

$$P\{|\hat\theta-\theta|>\varepsilon\} = P(\min X_i > \varepsilon+\theta) = P(X_1>\varepsilon+\theta, \dots, X_n>\varepsilon+\theta) \underset{\text{iid}}{=} P(X_1>\varepsilon+\theta)\cdots P(X_n>\varepsilon+\theta) \underset{\text{iid}}{=} (P(X_1>\varepsilon+\theta))^n =$$

$$= (1-P\{X_1\leq\varepsilon+\theta\})^n = (1-F_X(\varepsilon+\theta))^n \underset{\text{prop }\Phi}{=} (F_X(-(\varepsilon+\theta)))^n \underset{F'=f}{=} \left(\int_{\varepsilon+\theta}^{+\infty} f_X(x)\,dx\right)^n = \left(\int_{\varepsilon+\theta}^{+\infty}\frac{\theta}{x^2}\mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x)\,dx\right)^n =$$

$$= \left(\left[-\frac{\theta}{x}\right]_{\varepsilon+\theta}^{+\infty}\right)^n = \left(\frac{\theta}{\varepsilon+\theta}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

c)

distribuzione pivotale $\bar\theta_n = \frac{\min(X_i)}{\theta} = \min_i \frac{X_i}{\theta}$

$$\text{con } F_{\bar\theta_n}(y) = P(\bar\theta_n \leq y) = 1 - P(\bar\theta_n > y) = 1 - P\left(\frac{X_i}{\theta}>y\ \forall i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}>y\right)\right) \underset{\text{iid}}{=} 1 - \prod P\left(\frac{X_i}{\theta}>y\right) \underset{\text{iid}}{=} 1 - \left(P\left(\frac{X_1}{\theta}>y\right)\right)^n =$$

$$1-\left(\int_y^{\infty}\frac{1}{\theta}f_\theta(x)\,dx\right)^n = 1-\left(\int_y^{+\infty}\frac{1}{\theta}\cdot\frac{\theta}{x^2}\,dx\right)^n = 1-\left(\int_y^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\right)^n = 1-\left(\left[-\frac{1}{x}\right]_y^{+\infty}\right)^n = 1-\frac{1}{y^n}$$

$\Rightarrow 1-\alpha = P(\bar\theta_n < y_\alpha)$

11. * Sia dato un campione $X_1, \dots, X_n$ di legge uniforme su $(0, \theta)$, $\theta > 0$. Siano

$$\hat{\theta}_n = \max(X_1, \dots, X_n), \qquad \bar{\theta}_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

(a) $\hat{\theta}_n$ è una stima corretta di θ? è asintoticamente corretta?
(b) Calcolare il rischio quadratico (medio) della stima $\hat{\theta}_n$ di θ $R(\theta, \hat{\theta}_n) = \mathbb{E}_\theta[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$.
(c) è vero che $\lim_{n\to\infty} R(\theta, \hat{\theta}_n) = 0$? La successione di stime $(\hat{\theta}_n)_n$ è consistente?
(d) Dimostrare che $\hat{\theta}_n$ coincide con la stima di massima verosimiglianza per θ.
(e) La stima $\bar{\theta}_n$ di θ è corretta? è asintoticamente corretta?
(f) Calcolare il rischio quadratico (medio) della stima $\bar{\theta}_n$ di θ $R(\theta, \bar{\theta}_n) = \mathbb{E}_\theta[(\bar{\theta}_n - \theta)^2]$
(g) è vero che $\lim_{n\to\infty} R(\theta, \bar{\theta}_n) = 0$? Tale stima $\bar{\theta}_n$ è consistente?
(h) $\hat{\theta}_n$ è preferibile rispetto a $\bar{\theta}_n$?

a) $E[\hat{\theta}_n] = \theta$ corretta

$\lim_n E[\hat{\theta}_n] = \theta$ a. corretta

Ricordiamo legge uniforme $f_X = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x)$

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{se } 0 \le x < \theta \\ 1 & \text{se } x \ge \theta \end{cases}$$

$$f_{\max(x_i)}(x) = n\, f_{X_1}(x)(F_{X_1}(x))^{n-1} = \frac{n}{\theta}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x)\cdot\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}$$

$$E[\hat{\theta}_n] = E[\max(X_i)] = \int_{\mathbb{R}} x\, f_{\max(x_i)}(x) = \int_{\mathbb{R}} x\cdot\frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\cdot n = \int_0^\theta \left(\frac{x}{\theta}\right)^n n\,\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x) =$$

$$\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n = \left[\frac{n}{\theta^n}\frac{1}{(n+1)}x^{n+1}\right]_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta$$

$\Rightarrow \theta \ne \frac{n}{n+1}\theta$ non è corretto

Però $\lim_{n\to+\infty} E[\hat{\theta}_n] = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\theta = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})}\theta = \theta$ è a. corretto

b) $R(\theta, \hat{\theta}_n) = E_\theta[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$

$$E_\theta[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = \underbrace{E_\theta[\hat{\theta}_n^2]}_{=E[\hat{\theta}_n^2]} + \underbrace{E_\theta[\theta^2]}_{=\theta^2} + \underbrace{E[-2\hat{\theta}_n\theta]}_{=-2\theta E[\hat{\theta}_n]} =$$

$E[\hat{\theta}_n] = \frac{n}{n+1}\theta$

$$E[\hat{\theta}_n^2] = \int_0^\theta x^2\cdot\frac{1}{\theta}n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x) = n\int_0^\theta \frac{x^{n+1}}{\theta^n} = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1} = \left[\frac{n}{n+2}\frac{1}{\theta^n}x^{n+2}\right]_0^\theta = \theta^2\cdot\frac{n}{n+2}$$

$$R(\theta, \hat{\theta}_n) = \frac{n}{n+2}\theta^2 + \theta^2 - 2\frac{n}{n+1}\theta^2 = \theta^2\left[\frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1\right]$$

$$= \theta^2\left[\cancel{n^2} + \cancel{n} - \cancel{2n^2} - \cancel{4n} + \cancel{n^2} + \cancel{n} + \cancel{n} + 2\right] = \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)}$$

c)

$$\lim_{n\to+\infty} R(\theta, \hat{\theta}_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\theta}{(n+1)(n+2)} = 0$$

consistente

$\lim_n P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0$

Markov $\rightarrow P(X \ge a) \le \frac{1}{a}E[X]$

$$P((\hat{\theta}_n - \theta)^2 > \varepsilon^2) \le \frac{1}{\varepsilon^2}E[((\theta_n - \theta)^2)] = \frac{1}{\varepsilon^2}E[(\theta_n - \theta)^2] = \frac{2\theta^2}{\varepsilon^2}\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{1}{(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Quindi è consistente

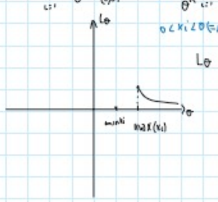
d) MLE

se vale ho la tesi dell'es

$L_U = \sup L_\theta = \hat{\theta}_n$

$$L_\theta = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x)\,dx = \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{(\max x_i, +\infty)}(\theta) \Rightarrow \hat{\theta} = \max X_i$$

$0 < x_i < \theta \Leftrightarrow 0 < \min x_i < \max x_i < \theta$



L_θ vale 0 $(-\infty, \max x_i)$
$\frac{1}{\theta^n}$ $[\max x_i, +\infty)$

d)

$E[\bar{\theta}_n] \stackrel{?}{=} \theta$

$x_i \sim U(a,b)$

$E[X_i] = \frac{a+b}{2} = \frac{0+\theta}{2}$

$$E[\bar{\theta}_n] = E\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = \frac{2}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{2} = \frac{2}{n}n\cdot\frac{\theta}{2} = \theta \Rightarrow \text{corretto}$$

$\lim_{n\to+\infty} E[\bar{\theta}_n] = \lim_{n\to+\infty}\theta = \theta \Rightarrow$ è a. corr

CORR $\Rightarrow$ A. CORR.

f) $R(\theta,\bar{\theta}_n) = E[(\bar{\theta}_n-\theta)^2] = E(\bar{\theta}_n^2) + \underset{\theta^2}{\underset{\parallel}{E[\theta^2]}} \underset{-2\theta^2}{\underset{\parallel}{-2\theta E[\bar{\theta}_n]}} = \frac{\theta^2}{3n}$

$E[\bar{\theta}_n^2] = E[(\frac{2}{n}\sum^n X_i)^2] = \frac{4}{n^2}\left(E[\sum X_i^2] + E[\sum_{i\neq j} X_iX_j]\right) = \frac{4}{n^2}\left(nE(X_i^2) + (n^2-n)E(X_i)^2\right) =$

$\left(n\frac{\theta^2}{3} + (n^2-n)\frac{\theta^2}{4}\right)\frac{4}{n^2} =$

$E[X_i^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x) = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta x^2\,dx = \frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{3}\theta^3 = \frac{\theta^2}{3}$

Totale

$\frac{4}{n}\frac{\theta^2}{3} + \cancel{\theta^2} - \frac{\theta^2}{n} - \cancel{\theta^2}$

$4\theta^2 - 3\theta^2 = \frac{\theta^2}{3n}$

g) $\lim_{n\to+\infty} R(\theta,\hat{\theta}_n) = \lim_n \frac{\theta^2}{3n} = 0$

Markow

$P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = P((\bar{\theta}_n-\theta)^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E((\bar{\theta}_n-\theta)^2) = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow[n]{} 0$

è consistente

h) $\hat{\theta}_n$ è preferibile a $\bar{\theta}_n$ $\iff$ $R(\theta,\hat{\theta}_n) \leq R(\theta,\bar{\theta}_n)$

$\frac{2\theta^2}{n-1} \overset{?}{\leq} \frac{\theta^2}{3n} \iff \frac{2\theta^2}{\theta^2} \leq \frac{n-1}{3n}$

$2 \leq \frac{n-1}{3n}$

$6n \leq n-1$ falso

$\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{\theta^2}{3n}$

$12 \leq 3\cdot 12$

$6 \leq 6$

$6n \leq (n+1)(n+2)$

$18 \leq 4\cdot 6$ falso.

Quindi $\hat{\theta}_n$ non è pref. rispetto a $\bar{\theta}_n$

12. Si consideri un campione $X_1,\dots,X_n$ di legge uniforme su $[a-b,a+b]$, $b>0$. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per (a,b), studiarne la correttezza, la consistenza e calcolarne il rischio quadratico (medio).

$f_{X_i}(x) = \frac{1}{a+b-(a-b)}\mathbb{1}_{[a-b,a+b]} = \frac{1}{2b}\mathbb{1}_{[a-b,a+b]}$

$F_{dr} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a-b \\ \frac{x-(a-b)}{2b} & \text{se } a-b \leq x < a+b \\ 1 & \text{se } x \geq a+b \end{cases}$

Stimatore

$L_\theta = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2b}\mathbb{1}_{(a-b,a+b)}(x) = \frac{1}{(2b)^n}\prod \mathbb{1}_{(a-b,+\infty)} \prod \mathbb{1}_{(-\infty,a+b]}$

$x_i > a-b \Rightarrow \min(x_i) > a-b$ $\qquad$ $x_i < a+b \Rightarrow \max(x_i) < a+b$

$= \frac{1}{(2b)^n}\prod \mathbb{1}_{\cap(a-b,+\infty)}(x) \prod \mathbb{1}_{\cap(-\infty,a+b]}(x) = \frac{1}{(2b)^n}\prod \mathbb{1}_{\min(x_i)>a-b} \prod \mathbb{1}_{\max(x_i)<a+b}$

$b = a - \min(x_i)$, $b = -a + \max(x_i)$, $a = \min(x_i) + b$, $a = \max(x_i) - b$

$\hat{a} = \frac{\min(x_i)+\max(x_i)}{2}$

$\hat{b} = \frac{\max(x_i)-\min(x_i)}{2}$

$X_1 \sim U(-2,2)$

$E(\hat{b}) = E\left(\frac{x_1-x_1}{2}\right) = 0 \neq 2 = b$ $\qquad \frac{2+2}{2} = 2$ $\qquad$ non corr.

$E(\hat{a}) = E\left(\frac{2x_1}{2}\right) = E(X_1) = \frac{2-2}{2} = 0$ ok corr.

FOGLIO 9 STATISTICA

sabato 19 agosto 2023 13:29

* Rappresenta gli esercizi prioritari

1. Sia dato $\{X_1, \dots, X_n\}$ un campione di legge (μ, σ^2). Per stimare μ si vuole usare

$$T_n = \frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

   (a) Lo stimatore T_n è corretto? $\rightarrow$ SI
   (b) T_n è consistente?

T_n e' corretto se $E[T_n] = \mu$.

$$E[T_n] = E\left[\frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] = \frac{1}{2}E[X_1] + \frac{1}{2n}E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{2}E[X_1] + \frac{n}{2n}E[X_i] = E[X_i] = \mu.$$

lo stimatore e' corretto

T_n e' consistente se $\lim_n P\{|T_n - \mu| > \varepsilon\} = 0$

$$P\{|T_n - \mu| > \varepsilon\} = P\left\{\frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{1}{n}\sum X_i\right) - \mu > \varepsilon\right\} = P\left\{\left|X_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 2\mu\right| > 2\varepsilon\right\} = P\left\{\left|X_1 + \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i - 2\mu\right| > 2\varepsilon\right\}$$

$$= P\left\{\left|\frac{n+1}{n}X_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i - 2\mu\right| > 2\varepsilon\right\} \le P\left\{\left|\frac{n+1}{n}X_1 - \mu\right| > 2\varepsilon, \left|\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} x_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{n+1}{n}X_1 - \mu\right| > 2\varepsilon\right\} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}X_1 - \mu\right| < \varepsilon\right\}$$

qualcosa $> \varepsilon$: qualcosa $> 2\varepsilon$ + qualcosa $< \varepsilon$

$$\underbrace{P\left\{\left|\frac{n+1}{n}X_1 - \mu\right| > 2\varepsilon\right\}} \cdot \underbrace{P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}} \cdot \underbrace{P\left\{\left|+\frac{1}{n}x_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}}_{> \frac{1}{2}} = \left(1 - \phi\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma}\right)\right) \cdot \frac{1}{4} \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0 \Rightarrow \text{non è consistente}$$

$$P\left\{X_1 > (2\varepsilon + \mu)\frac{n}{n+1}\right\} \le P\{X_1 > (2\varepsilon + \mu)\} = 1 - P\{X_1 \le (2\varepsilon + \mu)\} = 1 - P\left\{\frac{X_1 - \mu}{\sigma} \le \frac{2\varepsilon + \mu - \mu}{\sigma}\right\} = 1 - \phi\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$\frac{n}{n+1} < 1$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{X_1}{n} - \frac{\mu}{n}\right) < \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\mu}{n}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \ge \frac{1}{2}$$

$$P\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\bar{X}_n - \mu\right| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \phi\left(\frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}\,2}\right) \ge \frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ tende a 0 per $n \to +\infty$

2. * Sia dato $\{X_1, \dots, X_n\}$ un campione di legge Unif$((-\theta, 4\theta))$. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ e discuterne la correttezza e la consistenza.

$$\hat\theta = \sup L_\theta \qquad f_{X_i}(x) = \frac{1}{5\theta} \mathbb{1}_{(-\theta,4\theta)}(x)$$

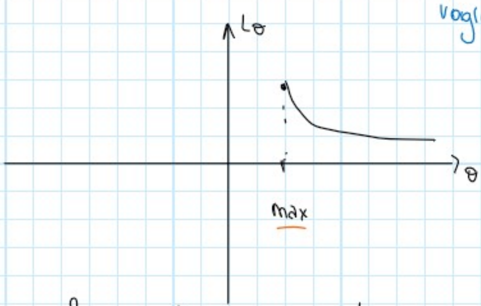
$$L_\theta = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{5\theta}\mathbb{1}_{(-\theta,4\theta)}(x) = \frac{1}{(5\theta)^n}\prod \mathbb{1}_{(-\theta,4\theta)}(x) = \frac{1}{(5\theta)^n}\prod \mathbb{1}_{(-\theta,+\infty)\cap(-\theta,4\theta)}(x) =$$

$-\theta < x_i < 4\theta \Rightarrow \min x_i \geq -\theta \Rightarrow -\min x_i \leq \theta \Rightarrow \theta \geq -\min x_i \Rightarrow (-\min x_i, +\infty)$

$\max x_i \leq 4\theta \Rightarrow \theta > \frac{1}{4}\max x_i \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\max x_i, +\infty\right)$

$$\left(\frac{1}{5\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\min x_i, +\infty)}(\theta)\, \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{4}\max(x_i), +\infty\right)}(\theta) = \frac{1}{(5\theta)^n}\, \mathbb{1}_{\left(\max\left\{\frac{1}{4}\max x_i, -\min x_i\right\}, +\infty\right)}(\theta)$$

voglio MLE



$$\hat\theta = \max\left\{\frac{1}{4}\max x_i, -\min x_i\right\}$$

$$\begin{cases} \frac{x-a}{b-a} = \frac{x+\theta}{5\theta} & \text{se } -\theta < x < 4\theta \\ 1 & \text{se } x > 4\theta \end{cases}$$

$E[\hat\theta] = \theta$? cioè è corretto

F. d R $\quad F_X = \frac{x+\theta}{5\theta}\mathbb{1}_{(-\theta,4\theta)}(x) + \mathbb{1}_{(4\theta,\infty)}(x)$

$F_{\max}(x_j) = \left(\frac{x+\theta}{5\theta}\right)^{n-1}\mathbb{1}_{(-\theta,4\theta)}(x) + \mathbb{1}_{(4\theta,+\infty)}(x)$ es 3 foglio 7

$\frac{1}{4}\max 4x = \max x$

$F_{\frac{1}{4}\max}(x_j) = \left(\frac{4x+\theta}{5\theta}\right)^n \mathbb{1}_{\left(-\frac{\theta}{4},\theta\right)}(x) + \mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(x)$ divido per $\frac{1}{4}$

$F_{-\min}(x_j) = P(-\min x_j \leq x) = P(\min x_j \geq -x) = P(X_1 \geq -x)^n = (1 - F_{X_j}(-x))^n$

$= \left(1 - \frac{x+\theta}{5\theta}\right)^n \mathbb{1}_{(-\theta,4\theta)}(-x) + \mathbb{1}_{(-\infty,-\theta]}(-x) \overset{\text{ripasso a } x}{=} \left(\frac{4\theta+x}{5\theta}\right)^n \mathbb{1}_{(-4\theta,\theta)}(x) + \mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x)$

c'è il $-x$ cambia l'int. è opposto

$$F_{\hat\theta}(x) = \left(\frac{4\theta+x}{5\theta}\right)^n \left(\frac{4x+\theta}{5\theta}\right)^n \mathbb{1}_{\left(-\frac{\theta}{4},\theta\right)}(x) + \mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(x)$$

prendo $\cap$ tra $(-4\theta,\theta)$ e $\left(-\frac{\theta}{4},\theta\right)$

$$E_\theta(\hat\theta) = \int_0^\theta x f_{\hat\theta}(x) = \int_0^{\theta/2} + \int_{\theta/2}^{\theta} \leq \frac{\theta}{2}F_\theta\left(\frac{\theta}{2}\right) + \theta\left(F(\theta) - F\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) < \theta F(\theta) = \theta \Rightarrow \text{NO corr.}$$

$\left(-\frac{\theta}{4},\theta\right) \cap (\theta, +\infty) = (0,\theta)$

$-\frac{\theta}{2}F\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$F(\theta) = 1$
$F\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$

Consistenza

$$P(|\hat\theta - \theta| \geq \varepsilon) = P(\hat\theta \leq \theta - \varepsilon) = F(\theta - \varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{5\theta}\right)^n \left(1 - \frac{4\varepsilon}{5\theta}\right)^n \to 0 \quad \text{corretto}$$

$$\left(\frac{4\theta + \theta - \varepsilon}{5\theta}\right)^n \left(\frac{5\theta - 4\varepsilon}{5\theta}\right)^n$$

4. * Sia dato un campione $X_1, \dots, X_n$ di legge Gaussiana di parametri $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R}(0, \infty)$.

(a) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di μ con $\sigma^2 = 1$.

(b) Sempre per $\sigma^2 = 1$, utilizzare il metodo della quantità pivotale per trovare un intervallo di fiducia al livello 0.95 per μ.

(c) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di σ^2 con μ noto.

(d) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per (μ, σ^2).

a) MLE per μ con $\sigma^2 = 1$ noto
↳ suggerisce $\frac{\partial L_\mu}{\partial \mu}$

$\hat{\mu} = \max L_\mu$

$f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$ densità di distrib. normale

$L_\mu = \prod \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \frac{1}{\sigma^n} e^{\sum - (x-m)^2/2\sigma^2}$

passo ai log →

$\log\left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sigma^n}\right) - \sum (x-m)^2/2\sigma^2 = \log (2\pi)^{-\frac{n}{2}} + \log(\sigma^{-n}) - \sum \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} =$

$= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - n \log(\sigma) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$

voglio il max $\Rightarrow \frac{\partial L_\mu}{\partial \mu} = 0$

$\partial_\mu L_\mu = 0 \iff \frac{\sum 2(x_i - \mu)}{2\sigma^2}(-1) = -\sum \frac{(x_i - \mu)}{\sigma^2} = 0 \iff \sum x_i - n\mu = 0 \iff$

$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

b) $1 - \alpha = 95\%$, var nota

uso ST $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu) \sim N(0,1)$

$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) = Z$

$* \ \phi(b) = \beta \Rightarrow b = q_\beta$ idem γ
$\phi^{-1} = q$ cerco β e γ t.c. IF sia min

$P\{a \le z \le b\} = \phi(b) - \phi(a) \overset{\text{io voglio} = 1-\alpha}{=} \beta - \gamma \Rightarrow \beta = 1 - \frac{\alpha}{2}, \ \gamma = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \beta - \gamma = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$ ok.

$P\{a \le \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \le b\} = P\left\{\sqrt{n}\bar{X} - b \le \mu\sqrt{n}, \ a - \sqrt{n}\bar{X} \le -\mu\sqrt{n}\right\} =$

$\sqrt{n}\bar{X} - a \ge \mu\sqrt{n}$

$= P\{\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} b \le \mu \le \bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} a\} = P\{\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} q_\beta \le \mu \le \bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} q_\gamma\} = P\{\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} q_{\frac{\alpha}{2}}\} =$

$q_{\frac{\alpha}{2}} = -q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ per simmetria

$= P(\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}})$

$IF_{95\%} = \left[\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}, \ \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$

c) MLE di σ^2 con μ noto
↳ suggerisce di fare $\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta} = 0$

$\hat{\theta} = \sup L_\theta$

$L_\theta = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \frac{1}{\sigma^n} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2/2\sigma^2}$

applico i log $\Rightarrow -\frac{n}{2}\log(2\pi) - n\log(\sigma) - \sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2/2\sigma^2$

voglio MLE $\Rightarrow$ cerco il max $\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta} = -\frac{n}{\sigma} - \frac{\sum (x-\mu)^2}{2\sigma^3} \cdot (-2) = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} = \frac{-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2}{\sigma^3} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}$

d) MLE per (μ, σ^2)

$\begin{pmatrix} \partial_\mu \\ \partial_\sigma \end{pmatrix} L_\mu = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum x_i - n\mu = 0 \\ -n\frac{1}{\sigma} + \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^3} = 0 \end{cases} = \begin{cases} \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum x_i \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \hat{\mu})^2 \end{cases}$

5. Una impresa di componenti elettronici decide di stimare il numero medio di piccole imperfezioni su un sistema assemblato. A tale scopo analizza 16 sistemi e rileva che il numero medio di imperfezioni ammonta a 32 e che la varianza campionaria risulta 8. Supponendo che le imperfezioni abbiano distribuzione normale, determinare l'intervallo di fiducia al 95% e al 99% per il numero medio di piccole imperfezioni su sistemi assemblati.

$S^2 = 8 \quad n = 16 \quad \bar{X} = 32 \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

1) $1-\alpha = 95\%$
2) $1-\alpha = 99\%$

$Z \sim N(0,1)$

Non conosco $\sigma \Rightarrow$ posso usare $Z \sim N(0,1)$

Però conosco $S \Rightarrow$ uso t-student.

$S_T = \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X} - \mu) = T(n) = T(16)$

$\sim t_{n-1} = t(15)$

$$P(a \le z \le b) = 1-\alpha = \phi(b) - \phi(a) = \beta - \gamma \Rightarrow \beta = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad \gamma = \frac{\alpha}{2}$$

$$P\left(a \le \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X} - \mu) \le b\right) = P\left(\bar{X} - \frac{bS}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} - \frac{aS}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\bar{X} - \frac{t_{1-\alpha/2,n-1} S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} S}{\sqrt{n}}\right)$$

dove $b = q_\beta = q_{1-\frac{\alpha}{2}} =: t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ e $a = q_\gamma = q_{\frac{\alpha}{2}} = -q_{1-\frac{\alpha}{2}} = -t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$

tabella
per $1-\alpha = 95\%$, in. bilatero, $n-1 = 15 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = 2{,}131 \Rightarrow$ l'IF è $\left[\frac{32 - \sqrt{8} \cdot 2.131}{4}, \frac{32 + \sqrt{8} \cdot 2.131}{4}\right]$

$$0.95 = P(a \le T_{16} \le b) = P\left(a \le \frac{(\bar{X}_{16} - \mu)}{S/4} \le b\right)$$

$$P\left(\frac{\bar{X}_{16} - b}{S/4} \le \mu < \frac{\bar{X}_{16} - a}{S/4}\right)$$

$(32 - b)\sqrt{2} \le \mu \le (32 - a)\sqrt{2}$

$b = 2.131$ $\qquad IC_{95\%} = \frac{32 - 2.131}{\sqrt{8}/4}, \frac{32 + 2.131}{\sqrt{8}/4}$

Analogo per $1-\alpha = 99\%$

6. * Dato $n \geq 1$, sia $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione di densità

$$f_\theta(x) = \theta \exp(x - \theta \exp(x)), \qquad \text{per } \theta > 0.$$

(a) Determinare lo stimatore Θ_n di massima verosimiglianza di θ

(b) Stabilire la correttezza e la consistenza della successione $(\Theta_n)_{n\geq 1}$

(c) Dato $\alpha \in (0,1)$, determinare una regione di fiducia al livello $1-\alpha$ per θ

MLE di θ

$$\Theta_n = \sup L_\theta(X) = \sup \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)$$

f. di verosim.

$$L_\theta(X) = \prod_{i=1}^n \theta e^{(x_i - \theta e^{x_i})} = \theta^n \prod_{i=1}^n e^{(x_i - \theta e^{x_i})}$$

funz di logverosomiglianza $\theta > 0$ $[\theta, +\infty)$ aperto

$$= \log(\theta^n) + \sum_{i=1}^n (x_i - \theta e^{x_i}) \underset{\text{spetto } \Sigma}{=} n\log(\theta) + \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \theta e^{x_i}$$

voglio MLE $\Rightarrow$ cerco il max $\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n e^{x_i} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\theta} = \frac{\sum_i^n e^{x_i}}{n} \Rightarrow \theta = \frac{n}{\sum e^{x_i}}$$

$$\Rightarrow \Theta_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{x_i}\right)^{-1}$$

b) corretto se $E[\Theta_n] = \theta$

$$E[\Theta_n] = E\left[\left(\frac{1}{n}\sum e^{x_i}\right)^{-1}\right] = n\, E\left[\left(\sum_{i=1}^n e^{x_i}\right)^{-1}\right] = n E[(n e^{x_1})^{-1}] = E[(e^{x_1})^{-1}] =$$

$$E[e^{-x_1}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \cdot \theta e^{x - \theta e^x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta e^{-\theta e^x} dx = \theta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta e^x} dx = \theta e^{-\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{e^x} dx$$

$$\underset{e^x = t}{=} \theta e^{-\theta} \int_0^{+\infty} e^t dt = \theta e^{-\theta} \left[e^t\right]_0^{+\infty} = +\infty \Rightarrow \Theta_n \text{ non è corretto}$$

consistente se $\lim_n P\{|\Theta_n - \theta| > \varepsilon\} = 0$

Chiamo $\Psi_n = \frac{1}{\Theta_n} = \frac{1}{n}\sum e^{x_i}$

$$E[\Psi_n] = E\left[\frac{1}{n}\sum e^{x_i}\right] = E[e^{x_i}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \theta e^{x - \theta e^x} dx = \theta e^{-\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} e^{e^x} dx = \frac{1}{\theta}$$

$$P(|\Psi_n - E[\Psi_n]| \leq \delta) = P\left(\left|\frac{1}{n}\sum e^{x_i} - \frac{1}{\theta}\right| \leq \delta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$P(|\Theta_n - \theta| < \varepsilon) = P\left(\left|\frac{1}{\Psi_n} - \theta\right| < \varepsilon\right) \geq P\left(\left|\Psi_n - \frac{1}{\theta}\right| \leq \varepsilon\right) \longrightarrow 1 \Rightarrow \text{consist.}$$

c) Chiamo $Y = e^X$ $\quad x = \underset{\varphi}{\log(y)}$

$$f_Y(y) = f_X(\underset{x}{\varphi^{-1}(y)}) \left|\frac{dx}{dy}\right| = \theta e^{\log(y) - \theta y} \cdot \frac{1}{y} = \theta e^{-\theta y}$$

$Y_i = e^{x_i} \sim Exp(\theta)$

$Z_i = 2\theta e^{x_i} \sim Exp\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$2n\theta \hat{\Theta_n} = \sum \theta e^{x_J} = \sum Z_J \sim \Gamma\left(n, \tfrac{1}{2}\right) = \chi^2(2n)$$

$$1-\alpha = P(2n\theta\Theta_n \in (A^*_-, A^*_+)) = P\Bigg(\theta \in \underbrace{\left(\frac{A_-^*}{n\Theta_n 2}, \frac{A_+^*}{n\Theta_n 2}\right)}_{IC.}\Bigg)$$

7. Dato $n \geq 1$, sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione di densità

$$f_\theta(x) = \frac{1}{12\theta^5} x^9 e^{-x^2/\theta} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

dove $\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ rappresenta la funzione indicatrice sull'insieme $(0, \infty)$.

(a) Determinare lo stimatore Θ_n di massima verosimiglianza di θ.

(b) Stabilire la correttezza della successione $(\Theta_n)_{n\geq 1}$.

(c) Dato $\alpha \in (0,1)$, determinare una regione di fiducia al livello $1-\alpha$ per θ.

$\Theta_n = \sup L_\theta$

$L_\theta = \prod_{i=1}^n \frac{1}{12\theta^5} x^9 e^{-x^2/\theta} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) = \frac{1}{(12)^n \theta^{5n}} \prod x^9 e^{-x^2/\theta}$

$= -n\log(12) - 5n\log(\theta) + 9\sum_{i=1}^n \log(x_i) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2$

MLE

$\frac{\partial L_\theta}{\partial\theta} = -\frac{5n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Rightarrow \frac{-5n\theta + \sum x_i^2}{\theta^2} = 0 \Rightarrow$

$\Theta_n = \frac{\sum x_i^2}{5n}$

b) $E[\Theta_n] = \frac{1}{5n} E[\sum x_i^2] = \frac{1}{5n} \cdot n\, E[X_i^2] = \frac{1}{5} E[X_i^2]$

$E[X_i^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{12\theta^5} x^9 e^{-x^2/\theta} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\, dx =$

$= \frac{1}{12\theta^5}\int_0^{+\infty} x^{11} e^{-x^2/\theta} = \frac{1}{12\theta^4}\theta^5 \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{x^{10}}{\theta^5} dt = \frac{1}{5}\frac{\theta}{12}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} t^5}_{120} = \theta$

$t = \frac{x^2}{\theta}$ $\quad dt = \frac{x}{\theta}$ $\quad \frac{x^{10}}{\theta^5} = t^5$

$x^2 = t\theta \Rightarrow x = t\theta$

$= t^5\theta^5$

$\Rightarrow$ corretto.

c $\quad y_j = \frac{x_j^2}{\theta}$

$f_Y(y) = \frac{1}{4!} y^4 e^{-y} dy \sim \Gamma(5,1)$

$Z_j = 2\frac{X_j^2}{\theta} \sim \Gamma(5, \frac{1}{2}) = \chi^2(10)$

$\sum Z_j = \frac{10n}{\theta}\Theta_n \sim \chi^2(10 n)$

$= \sum \frac{2}{\theta} x_j^2 = \frac{2}{\theta}\sum x_j^2 = \frac{2}{\theta} 5n \cdot \frac{1}{5n}\sum x_j^2$

$1-\alpha = P\left(\sum Z_j \in (A_-^*, A_+^*)\right) =$

$= P\left(\frac{10n}{\theta}\Theta_n \in (A_-^*, A_+^*)\right)$

$P\left(\theta \in \frac{10n\Theta_n}{A_+^*}, \frac{10n\Theta_n}{A_-^*}\right)$

FOGLIO 10

sabato 19 agosto 2023 13:26

1. * Sia dato un campione $X_1, \ldots, X_n$ con densità esponenziale di parametro $\lambda > 0$.
   (a) Trovare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\lambda}_n$ del parametro λ e $\hat{eta}_n$ dei $h(\lambda) = \lambda^{-1}$.
   (b) Queste stime sono corrette? asintoticamente corrette?
   (c) La successione di stime $(\hat{\lambda}_n)_n$ è consistente?
   (d) Esaminare il test unilatero di ipotesi nulla $H_\theta : \lambda \leq 1$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \lambda > 1$ al livello α.
   (e) Esaminare il test di ipotesi nulla $H_\theta : \lambda = 2$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \lambda \neq 2$ al livello α.

a)

$f_X(x_i) = \lambda e^{-\lambda x}$

$L_\lambda = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} \overset{\log}{=} n \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\frac{\partial l_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \iff \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$L_\eta = \prod \lambda^{-1} e^{\lambda^{-1} x} = \lambda^{-n} \prod e^{\lambda^{-1} x} = (\lambda^{-n}) e^{-\lambda^{-1} \sum^{i} x_i} = -n \log(\lambda) - \lambda^{-1} \sum^{i} x_i = n \log(\lambda^{-1}) - \frac{1}{\lambda} \sum^{i} x_i$

$L_{\frac{1}{\lambda}}$

$\frac{\partial l_\eta}{\partial \eta} = -\frac{n}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} \sum^{i} x_i \Rightarrow \frac{-n\eta + \sum^{i} x_i}{\eta^2} \Rightarrow \hat{\eta} = \frac{\sum^{i} x_i}{n}$

b)

corrette o a. corrette?

$E[\hat{\lambda}] = E[\frac{n}{\sum^{i} x_i}] = n E[(\sum^{i} x_i)^{-1}] = E[X_1^{-1}] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \lambda e^{-\lambda x} dx = +\infty \neq \lambda$ $\hat{\lambda}_n$ no corr.

$E[\hat{\eta}] = \frac{1}{n} E[\sum x_i] = \frac{1}{n} n E[X_1] = E(X_1) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} = \left[-\frac{\lambda}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} = \eta$

$\hat{\eta}$ corretto

$\hat{\eta}$ corretto $\Rightarrow \hat{\eta}$ a. corr.

vediamo se $\hat{\lambda}$ è a. corr.

$E[\lambda_n] = E\left[\frac{1}{\frac{1}{n}\sum x_i}\right] = n E\left[\frac{1}{\sum x_i}\right] = n E[\frac{1}{y}]$

con $y \sim \Gamma(n, \lambda)$

$n E[\frac{1}{y}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y} n \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y} dy = n \int \frac{\lambda^n y^{n-2}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} = \frac{\lambda n}{(n-1)} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1} y^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda y}}_{\Gamma(n-1, \lambda)}$

$= \frac{\lambda n}{n-1} \Gamma(n-1, \lambda) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\lambda n}{n(1-\frac{1}{n})} \Gamma(n-1, \lambda) \longrightarrow \lambda$

$\Rightarrow \hat{\lambda}$ a. corr.

$\lim_n P(|\hat{\lambda}_n - \lambda| > \varepsilon) = 0$

$P(|\frac{n}{\sum x_i} - \lambda| > \varepsilon) \leq P(|\frac{1}{n} \sum^{i} x_i - \frac{1}{\lambda}| > \delta) \longrightarrow 0$

con $\delta \geq |\varepsilon (\frac{1}{x})'|\big|_\lambda = \varepsilon \frac{1}{x^2}\big|_\lambda = \frac{\varepsilon}{\lambda^2}$

$\Rightarrow \hat{\lambda}$ consist.

$\boxed{\text{Teo}}$

Oppure $f_\lambda(x) = \lambda \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) e^{\lambda(-x)}$

e' un modello esp con $c_\sigma g(x) e^{\sigma T(x)}$

$x \longmapsto \mathbb{1}_{(0,+\infty)} x^2 e^{-\lambda x}$ integr $\Rightarrow$ consist.

c) $H_\theta: \lambda \leq 1 \qquad H_1: \lambda > 1$ a livello α

Considero lo stimatore di $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n}\sum X_i \sim \Gamma(n, \lambda n)$

$\sum X_i \sim \Gamma(n,\lambda) \Rightarrow c\sum X_i \sim \Gamma(n, \frac{\lambda}{c})$ $c = \frac{1}{n}$ nel nostro caso $\Rightarrow \sim \Gamma(n, n\lambda)$

Standardizz. $\frac{1}{n}\sum X_i = Y \sim \Gamma(n, \lambda n)$

$\Gamma(n,2) = \chi^2_{2n}$

$\frac{\lambda n}{2}\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) \sim \Gamma\left(n, \frac{2n}{\frac{\lambda n}{2}}\right) = \chi^2_{2n}$

quantile $q_{2n,\alpha}$

Supero Test se $\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) \leq q_{2n}$

d) $H_0: \lambda = 2$

Supero il Test se $\frac{n \cdot 2}{2}\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) \in \left(q_{1-\frac{\alpha}{2}}, q_{\alpha/2}\right)$

$1-\alpha = 95\%$ per $n=5 \Rightarrow 2n=10$

$0{,}95$, $10 \Rightarrow \alpha = 3.940$ $\quad 0{,}975\% \quad 3247 \quad 0{,}025 \Rightarrow 20{,}483$

2. * Sia dato un campione $X_1, \ldots, X_n$ con gegge Normale con parametri $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(a) Trovare un intervallo di confidenza a livello $1-\alpha$ per il parametro μ assumendo di non conoscere σ^2.

(b) Trovare un intervallo di confidenza a livello $1-\alpha$ per il parametro σ^2 assumendo di conoscere μ.

(c) Esaminare il test unilatero di ipotesi nulla $H_\theta: \mu \leq \mu_0$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1: \mu > \mu_0$ al livello α assumendo di non conoscere σ^2.

(d) Esaminare il test di ipotesi nulla $H_\theta: \mu = \mu_0$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1: \mu \neq \mu_0$ al livello α assumendo di non conoscere σ^2.

(e) Esaminare il test di ipotesi nulla $H_\theta: \sigma^1 \leq \sigma_0^2$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1: \sigma^1 > \sigma_0^2$ al livello α assumendo di conoscere μ.

media popol. gauss. var non nota

Uso ST $\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X} - m)}_{=T} \sim t_{n-1}$

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \bar{X}_n)^2$

Chiamo $t_{\beta,n-1}$ il quantile di t_{n-1} $\quad P\{T \leq t_{\beta,n-1}\} = \beta$

$P\{ST \in [-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}]\} = 1-\alpha$

$\left[\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right]$ è IF.

chi è T? $\quad T = \frac{\sqrt{n}}{S} Z = \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X} - \mu) \sim t_{n-1}$

$1-\alpha = P(ST \in (t^-_{a,\alpha}, t^+_{a,\alpha})) = P\left(\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} \in (t^-_{a,\alpha}, t^+_{a,\alpha})\right) =$

$= P\left(\mu \in \left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t^+_{a,\alpha}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t^-_{a,\alpha}\right]\right)$

IF. per la var. di popol gaussiane.

Uso $ST = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ $\quad$ con $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \bar{X}_n)^2$

$1-\alpha = P\left(\frac{n-1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \mu)^2 \in (\chi^-_n, \chi^+_n)\right)$

quantile di χ_{n-1}

$P\left(\theta \in \left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^+_n}, \frac{S^2(n-1)}{\chi^-_n}\right)\right)$

3. (Continua dal foglio precedente) Dato $n \geq 1$, sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione di densità

$$f_\theta(x) = \frac{1}{12\theta^5} x^9 e^{-x^2/\theta} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

dove $\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ rappresenta la funzione indicatrice sull'insieme $(0, \infty)$.

(a) Determinare lo stimatore Θ_n di massima verosimiglianza di θ.

(b) Formulare un test per l'ipotesi nulla $\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0$, ed ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$ al livello di significatività α.

es 7

$\Theta_n = \frac{1}{5n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0$, $\mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$ (hp composta)

per $\theta_1 < \theta_2$ verifico che $\frac{L_{\theta_2}(x_1 - , x_n)}{L_{\theta_1}(x_1 - , x_n)}$ è strett. crescente

$$\frac{L_{\theta_2}}{L_{\theta_1}} = \frac{\frac{1}{12\theta_2^5} x^9 e^{-x^2/\theta_2}}{\frac{1}{12\theta_1^5} x^9 e^{-x^2/\theta_1}} = \frac{\theta_1^5}{\theta_2^5} e^{-\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}\right)\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \frac{\theta_1^5}{\theta_2^5} e^{-\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2\theta_1}\right)\sum x_j^2} = \frac{\theta_1^5}{\theta_2^5} e^{\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2\theta_1}\right)\sum x_i^2}$$

= è strett. crescente in $T = \sum x_i^2$

regione critica $\{T \geq d_\alpha\}$

Dal foglio prima avevamo che $Z_j = \frac{2 X_j^2}{\theta} \sim \Gamma(5, \frac{1}{2})$

$\sum Z_j = \frac{2}{\theta} T \sim \chi^2(10n)$

$\alpha = P_{\theta_0}(T > d_\alpha) = P_{\theta_0}\left(\frac{2T}{\theta_0} > \frac{2}{\theta_0} d_\alpha\right)$

$\frac{2 d_\alpha}{\theta_0} = r_{10n, 1-\alpha}$ $\Leftrightarrow$ $d_\alpha = \frac{\theta_0}{2} \underbrace{r_{10n, 1-\alpha}}_{\text{quantile}}$.

4. (Continua dal foglio precedente) Dato $n \geq 1$, sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione di densità

$$f_\theta(x) = \theta \exp(x - \theta \exp(x)), \qquad \text{per } \theta > 0\,.$$

(a) Determinare lo stimatore Θ_n di massima verosimiglianza di θ.

(b) Formulare un test per l'ipotesi nulla $\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0$, ed ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$ al livello di significatività α.

$\Theta_n = \left(\frac{1}{n} \sum e^{x_j}\right)^{\cdot}$ es 6

$\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0$ e $\mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$. hp composte

Verifico che per $\theta_1 < \theta_2$ $\frac{L_{\theta_1}}{L_{\theta_2}}$ è strett. crescente

$$\frac{\theta_2 e^{x - \theta_2 e^x}}{\theta_1 e^{x - \theta_1 e^x}} = \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{x - \theta_2 e^x - x + \theta_1 e^x} = \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{x(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{(\theta_2 - \theta_1)\overset{T}{\sum e^{x_i}}} = \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{(\theta_2 - \theta_1)\frac{1}{T}}$$

è cres. in T

Regione critica $C_\alpha = \{T > d_\alpha\}$

V.a. Stand. $S = \theta \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \sim \Gamma(n, 1) = \chi^2(2n)$

$\alpha = P_{\theta_0}(T > d_\alpha) = P_{\theta_0}\left(\underbrace{\frac{1}{T}\theta_0}_{\overset{\shortparallel}{S}} < \frac{\theta_0}{d_\alpha}\right)$

$\Rightarrow \frac{\theta_0}{d_\alpha} = \chi^2_{2n, \alpha}$ $\Leftrightarrow$ $d_\alpha = \frac{\theta_0}{\chi^2_{2n, \alpha}}$