Foglio di esercizi 1

Discussione soluzioni: 07.03.2023

1. Tiriamo un dado non truccato due volte. Descrivi uno spazio degli esiti Ω e una misura di probabilità P per modellare il risultato di questo esperimento. Sia A l'evento {il secondo lancio più grande del primo}. Calcolare la probabilità $P(A)$.

2. In un gioco il giocatore ed il banco lanciano entrambi per 10 volte una moneta equilibrata. Il giocatore vince solo se il numero di teste da lui ottenuto è maggiore strettamente del numero di teste ottenuto dal banco. Qual è la probabilità che il giocatore vinca?

3. Le n cifre di un numero sono scelte in maniera casuale. Calcolare la probabilità che
   (a) non appaia il 3;
   (b) non appaiono né il 4 né il 7;
   (c) appaia almeno un 5.

   Scrivere poi un'espressione per la probabilità che nel numero il 3 appaia prima del 4.

4. Si estraggono due numeri a e b da una scatola contenente n palline numerate da 1 a n. Calcolare la probabilità che $|a-b|=1$ nell'ipotesi che le estrazioni vengano effettuate:
   (a) senza reinserimento;
   (b) con reinserimento.

5. Due amici si trovano in coda ad uno sportello della loro banca, insieme ad altre n persone. Assumendo di non avere informazioni sul momento del loro arrivo (cioè assumendo che ogni configurazione delle persone in coda è ugualmente probabile), calcolare la probabilità che siano separati
   (a) da esattamente k persone;
   (b) da almeno 3 persone.

6. Si scrivono su 11 foglietti di carta le lettere della parola **ABRACADABRA**, una per foglietto, e le si pongono in un contenitore. Si estraggono poi, a caso, i foglietti. Qual è la probabilità che le lettere, nell'ordine estratto, diano di nuovo la stessa parola?

7. Quattro giocatori sono ad un tavolo da poker. Determinare la probabilità che, una volta distribuite le carte (ognuno dei quattro giocatori riceve 5 carte),
   (a) il primo giocatore riceva esattamente un asso;
   (b) ogni giocatore abbia esattamente un asso.

8. Siano A, B, C, D quattro eventi tali che $P(A) = 1/2$, $P(A \cap B \cap D) = 1/4$ e $P(A \cap B \cap C \cap D) = 1/9$.
   (a) Dimostrare che le ipotesi fatte non sono in contraddizione con gli assiomi di Kolmogorov.
   (b) Calcolare, se possibile, $P(A \cap [(B \cap D)^c \cup C])$.

9. (Paradosso dei compleanni). Consideriamo una classe di n persone e a ognuna di esse associamo un numero da 1 a 365 (per semplicità non si considerano gli anni bisestili) che corrisponde al numero di giorni tra il primo gennaio ed il giorno del rispettivo compleanno. Qual è la probabilità che almeno due persone abbiano il compleanno lo stesso giorno? (Dare una formula per il risultato, e tempo permettendo valutarla con l'aiuto di un computer per $n \in \{2, \ldots, 100\}$)

10. Il problema di Monty Hall è un famoso problema di matematica basato su un quiz televisivo condotto da Monty Hall. Tu (il concorrente) hai davanti tre porte chiuse. C'è un premio (10^4 EUR) dietro una porta, e una capra dietro ognuna delle altre due. Ti viene chiesto di scegliere una porta tra le tre, ma non puoi ancora vedere cosa c'è dietro. Monty, che sa cosa c'è dietro ogni porta, apre una delle altre due porte per rivelare che c'è dietro una capra. Quindi ti offre una possibilità per cambiare la tua scelta. È una buona idea cambiare (assumendo di avere già tante capre a casa, quindi di volere il premio)?

    Questa domanda genera spesso molta confusione (provate con amici/famiglia!). Un un'allettante risposta intuitiva potrebbe essere: Dopo che Monty ti ha mostrato una porta senza premio, è ugualmente probabile che il premio si trovi dietro una delle altre due porte. Quindi, cambiare non fa differenza. È corretto?

    Per fare chiarezza, usiamo il modello più semplice possibile: assumiamo che tu abbia deciso se cambiare o no *prima* dell'inizio del gioco.

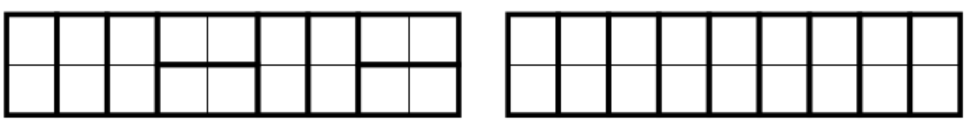
    (a) Lascia che il risultato di l'esperimento sia la porta dietro la quale si nasconde il premio. Trova lo spazio di probabilità che descrive l'esperimento (la tua decisione di cambiare o meno non fa parte del modello).

    Ora, usiamo il modello per calcolare la probabilità di vincita separatamente per i due scenari (quello dove cambi e quello dove non cambi). Per ragioni di simmetria, possiamo sistemare l'etichettatura delle porte in modo che la tua scelta iniziale sia la porta numero 1.

    (b) Supponi che la tua strategia sia di non cambiare. Qual è la probabilità di vincere il premio?[1]

    (c) Supponi che la tua strategia sia di cambiare dopo che Monty mostra una porta senza premio. Quale è la probabilità di vincere il premio?

11. Piastrelliamo una scacchiera di dimensione $2\times(2n+1)$ con $2n+1$ piastrelle di taglia 2×1 in modo che ogni casella sia coperta da esattamente una piastrella. Le piastrelle possono essere disposte orizzontalmente o verticalmente. Assumiamo di scegliere una configurazione a caso in modo che ogni configurazione distinta abbia la stessa probabilità di essere scelta. La figura qui sotto mostra due configurazioni possibili per $2n + 1 = 9$.



    (a) Calcolare la probabilità della configurazione con tutte le piastrelle disposte verticalmente

    (b) Trovare la probabilità che ci sia una piastrella verticale al centro della scacchiera (nella posizione $n + 1$)

12. (Opzionale) Un sacchetto contiene 90 gettoni numerati da 1 a 90. Tre giocatori, detti A, B, C, estraggono (senza reinserimento) 2 gettoni a testa, ed ognuno dei giocatori sceglie il gettone con il valore più grande tra i suoi gettoni. Si stila poi una classifica, in base al valore dei gettoni dal più grande al più piccolo, dei tre giocatori.

    (a) Dire quante sono le estrazioni possibili (ovvero gli insiemi di coppie di gettoni in possesso dei tre giocatori prima della selezione del massimo). Dire se le estrazioni sono equiprobabili, giustificando la propria risposta.

    (b) Dire quanti sono i risultati possibili (ovvero le terne di gettoni dei tre giocatori dopo la selezione del massimo). Dire se i risultati sono equiprobabili, giustificando la propria risposta.

    (c) Calcolare le probabilità che A si classifichi primo e che A si classifichi secondo.

    (d) Calcolare le probabilità del quesito precedente nel caso in cui inizialmente A estragga 2 gettoni, B ne estragga 3 e C ne estragga 4.

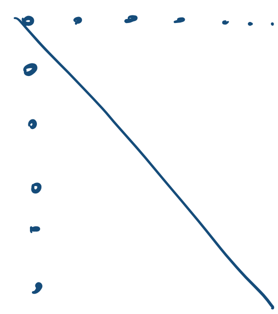
[1] Considera, per ciascuna porta i, se vinci o meno quando il premio è dietro la porta i.

1. Tiriamo un dado non truccato due volte. Descrivi uno spazio degli esiti Ω e una misura di probabilità P per modellare il risultato di questo esperimento. Sia A l'evento {il secondo lancio più grande del primo}. Calcolare la probabilità $P(A)$.

Prove ripetute:

- lancio primo dado $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$
- lancio secondo dado $\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$\Rightarrow \Omega = \{(\omega_1,\omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1 , \omega_2 \in \Omega_2\}$$
$$= \{(1,1), (1,2), (1,3) \dots (2,1) \dots (6,6)\}$$



$\mathbb{P}$ è la misura uniforme su Ω:

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \qquad \forall \omega \in \Omega$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{\{1° \text{ lancio} > 2° \text{ lancio}\}}_{A}) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \cdot |A| = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{12}$$

2. In un gioco il giocatore ed il banco lanciano entrambi per 10 volte una moneta equilibrata. Il giocatore vince solo se il numero di teste da lui ottenuto è maggiore strettamente del numero di teste ottenuto dal banco. Qual è la probabilità che il giocatore vinca?

$$\Omega_i = \{0,1\} \quad , \Omega = \{\underbrace{\omega_1, \dots, \omega_{10}}_{\text{giocatore}}, \underbrace{\omega_{11} \dots \omega_{20}}_{\text{banco}} : \omega_i \in \Omega_i\}$$

$$P(\omega) = \frac{1}{2^{20}}$$

$$A_+ = \{\text{vittoria giocatore}\} = \left\{\sum_{i=1}^{10} \omega_i > \sum_{j=11}^{20} \omega_j\right\}$$

$$A_= = \left\{\sum_{i=1}^{10} \omega_i = \sum_{j=11}^{20} \omega_j\right\} \qquad A_- = \Omega / (A_+ \cup A_=) = \left\{\sum_{j=11}^{20} \omega_j > \sum_{i=1}^{10} \omega_i\right\}$$

Notiamo che Ω può essere diviso in 3 pezzi disgiunti

$\Omega = A_+ \cup A_= \cup A_-$ e che $|A_+| = |A_-|$

quindi $\mathbb{P}(A_+) + \mathbb{P}(A_-) + \mathbb{P}(A_=) = 2\mathbb{P}(A_+) + \mathbb{P}(A_=) = 1$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(A_+) = \frac{1-\mathbb{P}(A_=)}{2} = \frac{1-\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}^2 \cdot \frac{1}{2^{20}}}{2}$$

3. Le n cifre di un numero sono scelte in maniera casuale. Calcolare la probabilità che

   (a) non appaia il 3;

   (b) non appaiono né il 4 né il 7;

   (c) appaia almeno un 5.

   Scrivere poi un'espressione per la probabilità che nel numero il 3 appaia prima del 4.

$$\Omega_i = \{0,1,2,\dots,9\} \longrightarrow \Omega = \{(\omega_1 \dots \omega_n) : \omega_i \in \Omega_i\}.$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{10^n} \qquad \forall \omega \in \Omega$$

a) $\mathbb{P}(\underbrace{\{\text{non appare il } 3\}}_{A_3}) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \cdot |A| = \frac{9^n}{10^n}$

b) $\mathbb{P}(\underbrace{\{\text{non appare } 4,7\}}_{A_{4,7}}) = \sum_{\omega \in B} \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} |B| = \frac{8^n}{10^n}$

c) $\mathbb{P}(\underbrace{\{\text{appare almeno } 5\}}_{A_5^c = \{\text{non appare } 5\}^c}) = 1 - \mathbb{P}(A_5) = 1 - \frac{9^n}{10^n}$

$$\mathbb{P}(\{3 \text{ appare prima del } 4\}) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} \{3 \text{ prima } 4,\ \text{primo } 3 \text{ in posizione } j\}\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\{\text{primo } 3 \text{ in posizione } j,\ \text{nessun } 4 \text{ prima di } j\})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\{3 \text{ in posizione } j,\ \text{nessun } 3 \text{ o } 4 \text{ prima di } j\})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{8^{j-1} \cdot 1 \cdot 10^{n-j}}{10^n} = \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{8}{10}\right)^{j-1} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1-(8/10)^n}{1-8/10}$$

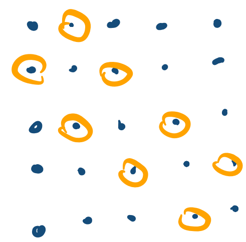
4. Si estraggono due numeri a e b da una scatola contenente n palline numerate da 1 a n. Calcolare la probabilità che $|a - b| = 1$ nell'ipotesi che le estrazioni vengano effettuate:

   (a) senza reinserimento;

   (b) con reinserimento.

b) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$ $\quad \Omega_1 = \Omega_2 = \{1, \dots, n\}$.

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n^2} \quad \forall \omega \in \Omega.$$



$$\longrightarrow \mathbb{P}(\{|\omega_1 - \omega_2| = 1\}) = \frac{2 \cdot (n-1)}{n^2}$$

a) $\Omega' = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2, \omega_1 \neq \omega_2\}$.

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega'|} = \frac{1}{\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 2}.$$

$$\mathbb{P}(\{|\omega_1 - \omega_2| = 1\}) = \frac{2 \cdot (n-1)}{n \cdot (n-1)} = \frac{2}{n}$$

6. Si scrivono su 11 foglietti di carta le lettere della parola **ABRACADABRA**, una per foglietto, e le si pongono in un contenitore. Si estraggono poi, a caso, i foglietti. Qual è la probabilità che le lettere, nell'ordine estratto, diano di nuovo la stessa parola?

$$\Omega = \{ \omega_1 \dots \omega_{11} : \omega_i \in \Omega_i , \ \omega_i \neq \omega_j \ i \neq j \}$$

$$\Omega_i = \{ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_1, B_2, C_1, D_1, R_1, R_2 \}$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{11!}$$

$$\mathbb{P}(\{ABRACADABRA\}) = \frac{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{11!} = \frac{5!2!2!}{11!}$$

7. Quattro giocatori sono ad un tavolo da poker. Determinare la probabilità che, una volta distribuite le carte (ognuno dei quattro giocatori riceve 5 carte),

   (a) il primo giocatore riceva esattamente un asso;

   (b) ogni giocatore abbia esattamente un asso.

$$\Omega = \{ (\omega_1, \dots, \omega_{20}) : \omega_i \in \Omega_i , \ \omega_i \neq \omega_j \ \forall i, j \}$$

$$\Omega_i = \{ A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit, K\heartsuit, \dots \} \qquad |\Omega_i| = 52.$$

a) $$\mathbb{P}(A_1) = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{48} \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot \cancel{48}} =$$

$A_1 = \{$esatt. un asso per G1$\}$

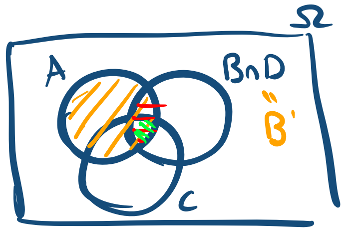
b) $$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{4^4 \, 4! \ 48!/32!}{52!/32!} = \frac{5^4 \cdot 4!}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}$$

8. Siano A, B, C, D quattro eventi tali che $P(A) = 1/2$, $P(A \cap B \cap D) = 1/4$ e $P(A \cap B \cap C \cap D) = 1/9$.

(a) Dimostrare che le ipotesi fatte non sono in contraddizione con gli assiomi di Kolmogorov.

(b) Calcolare, se possibile, $P(A \cap [(B \cap D)^c \cup C])$.

a)



$P(A), P(A \cap B \cap D); P(A \cap B \cap C \cap D) \in [0,1]$

Consideriamo la σ-algebra generata da

$\{A,\ A \cap B',\ A \cap B' \cap D\}$

Questa σ-algebra è la stessa che è generata dalla partizione

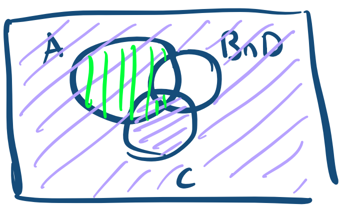
$\{A^c;\ A \cap (A \cap B')^c;\ (A \cap B') \cap (A \cap B' \cap C)^c,\ A \cap B' \cap C\}$

Basta calcolare che $\mathbb{P}$ di ognuno degli elementi sopra è $\in [0,1]$

$\mathbb{P}(A^c) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap (A \cap B')^c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ $\quad \mathbb{P}(A \cap B' \cap C) = \frac{1}{9}$

$\mathbb{P}((A \cap B') \cap (A \cap B' \cap C)^c) = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}$

b)



$$\mathbb{P}(A \cap (B'^c \cup C)) = \mathbb{P}(A \cap (A \cap B')^c) + \mathbb{P}(A \cap B' \cap C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

9. (Paradosso dei compleanni). Consideriamo una classe di n persone e a ognuna di esse associamo un numero da 1 a 365 (per semplicità non si considerano gli anni bisestili) che corrisponde al numero di giorni tra il primo gennaio ed il giorno del rispettivo compleanno. Qual è la probabilità che almeno due persone abbiano il compleanno lo stesso giorno? (Dare una formula per il risultato, e tempo permettendo valutarla con l'aiuto di un computer per $n \in \{2, \ldots, 100\}$)

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega_i\} \qquad \Omega_i = \{1, 2, \ldots 365\}$$

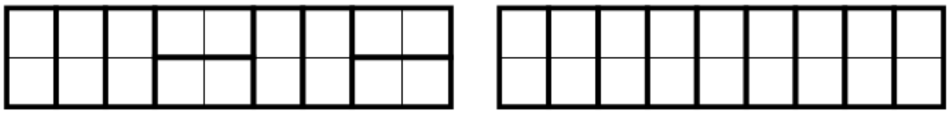
$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{(365)^n}$$

$A_n = \{$due persone hanno compleanno stesso giorno$\}$

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n^c) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!} \cdot \frac{1}{365^n}$$

$$\mathbb{P}(A_n^c) = \sum_{\omega \in A_n^c} \mathbb{P}(\omega) = \frac{|A_n^c|}{|\Omega|} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots (365-n+1)}{365^n}$$

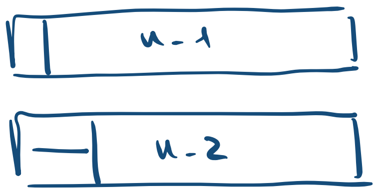
11. Piastrelliamo una scacchiera di dimensione $2\times(2n+1)$ con $2n+1$ piastrelle di taglia 2×1 in modo che ogni casella sia coperta da esattamente una piastrella. Le piastrelle possono essere disposte orizzontalmente o verticalmente. Assumiamo di scegliere una configurazione a caso in modo che ogni configurazione distinta abbia la stessa probabilità di essere scelta. La figura qui sotto mostra due configurazioni possibili per $2n+1=9$.



(a) Calcolare la probabilità della configurazione con tutte le piastrelle disposte verticalmente

(b) Trovare la probabilità che ci sia una piastrella verticale al centro della scacchiera (nella posizione $n+1$)

sia a_n il numero di configurazioni una scacchiera di lunghezza n.



Calcoliamo:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = a_2 + a_1 \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

a) $\mathbb{P}(\text{tutte verticali}) = \dfrac{1}{|\Omega_n|} = \dfrac{1}{a_n}$

b) $\mathbb{P}(\text{centrale verticale}) = \dfrac{|B_n|}{|\Omega_n|} = \dfrac{a_{\frac{n-1}{2}}^{2}}{a_n}$

$|B_n| = a_{\frac{n-1}{2}}^{2}$

10. Il problema di Monty Hall è un famoso problema di matematica basato su un quiz televisivo condotto da Monty Hall. Tu (il concorrente) hai davanti tre porte chiuse. C'è un premio (10^4 EUR) dietro una porta, e una capra dietro ognuna delle altre due. Ti viene chiesto di scegliere una porta tra le tre, ma non puoi ancora vedere cosa c'è dietro. Monty, che sa cosa c'è dietro ogni porta, apre una delle altre due porte per rivelare che c'è dietro una capra. Quindi ti offre una possibilità per cambiare la tua scelta. È una buona idea cambiare (assumendo di avere già tante capre a casa, quindi di volere il premio)?

    Questa domanda genera spesso molta confusione (provate con amici/famiglia!). Un un'allettante risposta intuitiva potrebbe essere: Dopo che Monty ti ha mostrato una porta senza premio, è ugualmente probabile che il premio si trovi dietro una delle altre due porte. Quindi, cambiare non fa differenza. È corretto?

    Per fare chiarezza, usiamo il modello più semplice possibile: assumiamo che tu abbia deciso se cambiare o no *prima* dell'inizio del gioco.

    (a) Lascia che il risultato di d l'esperimento sia la porta dietro la quale si nasconde il premio. Trova lo spazio di probabilità che descrive l'esperimento (la tua decisione di cambiare o meno non fa parte del modello).

    Ora, usiamo il modello per calcolare la probabilità di vincita separatamente per i due scenari (quello dove cambi e quello dove non cambi). Per ragioni di simmetria, possiamo sistemare l'etichettatura delle porte in modo che la tua scelta iniziale sia la porta numero 1.

    (b) Supponi che la tua strategia sia di non cambiare. Qual è la probabilità di vincere il premio?[1]

    (c) Supponi che la tua strategia sia di cambiare dopo che Monty mostra una porta senza premio. Quale è la probabilità di vincere il premio?

a) $\Omega = \{1, 2, 3\}$ $\qquad \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{3}$

b) La strategia è di non cambiare, quindi

$$\mathbb{P}(\text{vincere}) = \mathbb{P}(1) = \frac{1}{3}$$

c) La strategia è di non cambiare

$$\mathbb{P}(\text{vincere}) = 1 - \mathbb{P}(1) = \frac{2}{3}$$

Richiamo di combinatoria

Obiettivo: calcolare "quanti modi ci sono per (...)"
aka (also known as) cardinalità di insiemi

0) Principio moltiplicativo:

Calcolare il # di modi di fare una scelta in N passi con:

- n_1 modi di fare il primo passo
- n_2 modi di fare il secondo
- ...
- n_N modi di fare l'N-esimo.

allora # modi totali $= n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_N$

$$\left|\{(x_1, x_2, \dots x_n) : x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_{2,x_1},\ x_3 \in A_{3x_1x_2}, \dots x_N \in A_{Nx_1 \dots x_{N-1}}\}\right|$$

$$= n_1 \cdot n_2 \cdots n_N \quad \text{se} \quad \begin{cases} |A_1| = n_1 \\ |A_{2x_1}| = n_2 & \forall x_1 \in A_1 \\ \vdots \\ |A_{Nx_1 \dots x_{N-1}}| = n_N & \forall x_1 \in A_1, x_2 \in A_{2x_1}, \dots \end{cases}$$

1) Permutazioni di n elementi.

"modi di ordinare n elementi $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$"

$$= \left|\{(x_1, \dots x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\},\ x_i \neq x_j\ \forall i \neq j\}\right|$$

$$= \left|\{(a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)}) : \sigma \in S_n\}\right|$$

$$= n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Dim: Costruiamo ogni n-tuple sequenzialmente in n passi.

- primo elemento in $A_1 = \{a_1 \dots a_n\} \longrightarrow n_1 = n$
- secondo in $A_{2 x_1} = \{a_1, \dots a_n\} \setminus \{x_1\} \longrightarrow n_2 = n-1$
- ...
- ultimo in $A_{n x_1 \dots x_{n-1}} = \{a_1 \dots a_n\} \setminus \{x_1 \dots x_{n-1}\} \longrightarrow n_n = 1$

$\Longrightarrow$ # permutazioni $\{a_1 \dots a_n\} = n \cdot (n-1) \dots 1 = n!$

2) Disposizioni (semplici) di k oggetti su n $(k \leq n)$.

"modi di disporre k elementi scelti in un insieme $\{a_1, \dots, a_n\}$ di n elementi tenendo conto dell'ordine"

$= |\{(x_1, \dots, x_k) : x_1, \dots x_k \in \{a_1, \dots a_n\} \ \ x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}|$

$= n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Dim: come per permutazioni, ma fermandosi dopo k elementi.

Es: In una gara con 10 atleti, i possibili podi sono

disposizioni di 3 elementi su 10 $= \dfrac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8$

3) Disposizioni con ripetizione di k elementi scelti tra n

"modi di disporre k elementi possibilmente ripetuti scelti in un insieme $\{a_1, \dots, a_n\}$ di n el. tenendo conto dell' ordine"

$$= |\{(x_1, \dots x_k) : x_1, \dots x_k \in \{a_1, \dots, a_n\}\}| = |\{a_1, \dots, a_n\}^k|$$

$$= n^k$$

Dim: Costruiamo ogni k-tupla in k passi

- $x_1 \in \{a_1, \dots a_n\} \longrightarrow n_1 = n$
- $x_2 \in \{a_1, \dots, a_n\} \longrightarrow n_2 = n$
- ...

$\Longrightarrow n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = n^k$

Es: Lancio un dado 3 volte di fila

\# disposizioni con ripetizione di 3 oggetti tra 6 $= 6^3$

Es: Estrazione di 5 biglie con reinserimento da urna con 20:

\# disposizioni con ripet. di 5 elementi su 20 $= 20^5$

4) Combinazioni (semplici) di k elementi scelti tra n $(k \leq n)$

"modi di scegliere k elementi distinti in un insieme $\{a_1, \dots a_n\}$ di n elementi senza tenere conto dell' ordine"

$$= \{A \subseteq \{a_1, \dots, a_n\} : |A| = k\}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Dim: Combinazioni sono disposizioni "senza ordine".

Ad ogni combinazione corrispondono $k!$ disposizioni:

$$\left|\left\{\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}\right) \mid \sigma \in S_k\right\}\right| = k!$$

$$\Longrightarrow \# \text{combinazioni} = \frac{\# \text{disposizioni}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} =: \binom{n}{k}$$

Es: Possibili estrazioni del lotto (no ordine, 5 numeri su 90):

$$\# \text{combinazioni di 5 el. su } 90 = \binom{90}{5}$$

5) Combinazioni di n elementi divisi in m gruppi.

"modi di dividere un insieme $\{a_1, \dots, a_n\}$ di n elementi in m gruppi (numerati / ordinati tra loro) di cui

- il 1° gruppo con k_1 elementi
- il 2° gruppo con k_2 elementi
- ...
- l'm° gruppo con k_m elementi"

$k_1 + \dots + k_m = n$

$$= \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_m!}$$

Dim: $$\# \text{raggruppamenti} = \frac{\# \text{permutazioni di } n \text{ elementi}}{\# \text{permutazioni che danno lo stesso raggruppamento}}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\dots\,k_m!}$$

per ogni permutazione ci sono $k_1! \cdot k_2! \dots k_m!$ perm. "equivalenti":

$$\underbrace{\{x_1 x_2 \dots x_{k_1}\}}_{k_1!} \cdot \underbrace{\{x_{k_1+1} \dots x_{k_1+k_2}\}}_{k_2!} \dots x_n$$

Es : Lancio un dado 5 volte. In quanti modi posso fare 2 volte 3, 2 volte 5 e 1 volta sei?

$= \#$ raggruppamenti di $\{1,2,3,4,5\}$ in $\begin{cases} |G_3| = 2 \\ |G_5| = 2 \\ |G_6| = 1 \end{cases}$

$$= \frac{5!}{2!\,2!\,1!}$$

Nota : Alternativamente, si può pensare a

$\#$ raggruppamenti di $\{1,2,3,4,5\}$ =

$= (\#$ combinazioni di posizioni "date" a $G_1) \dots$
$(\#$ combinazioni di posizioni "date" a $G_m)$

$$= \binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n - \sum_i^{m-1} k_i}{}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,\cancel{(n-k_1)!}} \; \frac{\cancel{(n-k_1)}!}{k_2!\,(\cancel{n-k_1-k_2})!} \dots \frac{(n-\sum k_i)!}{0!\;k_m!}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\dots\,k_m!}$$

6) # di estrazioni (non ordinate, senza reinserimento)

- da N elementi, di cui N_1 di tipo 1, N_2 di tipo 2, ... N_m di tipo m
- di n elementi, di cui $n_1 \leq N_1$ di tipo 1, $n_2 \leq N_2$ di tipo 2, ... $n_m \leq N_m$ di tipo m

$$= \binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\cdots\binom{N_i}{n_i}\cdots\binom{N_m}{n_m}$$

scelte di n_i elementi di tipo i.

Foglio di esercizi 2

Discussione soluzioni: 14.03.2022

1. Un giocatore lancia due dadi. Se il risultato del lancio del primo dado è 3, qual è la probabilità che la somma dei risultati sia almeno 6? Rispondere a questa domanda facendo uso esplicito della definizione di probabilità condizionata.

2. Due contenitori contengono rispettivamente il primo, 5 palline rosse e 7 nere, il secondo 8 palline rosse e 3 nere. Si sceglie a caso un contenitore e da esso si estraggono due palline, che risultano essere entrambe rosse. Qual è la probabilità che le palline siano state estratte dal primo contenitore?

3. Due dadi vengono tirati. Consideriamo i tre seguenti eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{il primo dado dà un numero dispari,} \\ B &= \text{il secondo dado dà un numero pari,} \\ C &= \text{la somma dei due risultati è pari.} \end{aligned}$$

   (a) Dire se i tre eventi A, B, C sono indipendenti.
   (b) Dire se sono a due a due indipendenti.

4. Sappiamo che il 4% della popolazione è affetto da una certa malattia. Abbiamo a disposizione un test con le seguenti caratteristiche: se la persona è malata, il test è positivo con probabilità pari a 0.95, se la persona è sana, il test è positivo con probabilità pari a 0.15.

   (a) Qual è la probabilità che una persona sia malata se è risultata positiva al test?
   (b) Qual è la probabilità che una persona sia sana se è risultata negativa al test?

5. Una coppia ha due figli.

   (a) Se almeno uno dei due è maschio, qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?
   (b) Se il secondogenito è maschio, qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?

6. Siano A, B, C tre eventi. Consideriamo le due affermazioni

   H_1 : "A, B sono indipendenti" e
   H_2 : "A, B sono indipendenti condizionatamente a C" (ovvero $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$).

   (a) Vale l'implicazione $H_1 \Rightarrow H_2$?
   (b) Vale l'implicazione $H_2 \Rightarrow H_1$?
   (c) Sotto quali ipotesi su C vale $H_1 \Leftrightarrow H_2$?

7. Mostrare che, se A, B e C sono eventi indipendenti, allora $A \cap B$ e C sono eventi indipendenti. Mostrare che il viceversa non vale. Mostrare lo stesso per $A \cup B$ e C.

8. Un mago dice di possedere una moneta magica che alterna perfettamente tra lanci risultanti in testa e croce (se la volta precedente ha dato testa, la prossima volta darà croce e vice versa con probabilità 1). Uno scettico, prima di vedere l'esperimento, pensa che ci sia solo l'1% di probabilità che la moneta abbia questa proprietà, e chiede al mago di convincerlo del contrario. Quanti lanci alternati dovranno essere osservati dallo scettico perche (secondo lui) la probabilità che la moneta abbia la proprietà professata dal mago sia maggiore del 99%?

9. Ci sono n contenitori, numerati da 1 a n. Il contenitore k-esimo contiene k palline rosse e $n-k$ palline nere. Si sceglie a caso un contenitore e da questo si estrae una pallina. Qual è la probabilità che la pallina sia rossa? Si eseguono due estrazioni, ognuna con la medesima modalità usata in precedenza. Qual è la probabilità che entrambe le palline siano rosse, se dopo la prima estrazione la pallina estratta viene rimessa nel contenitore da cui era stata estratta? Qual è la probabilità se invece la pallina non viene rimessa?

10. (Monty Hall 2.0) Risolvere il problema 10 del foglio di esercizi 1 usando la formula di Bayes: Assumiamo che tu abbia scelto la porta 1 e che Monty abbia aperto la porta 3 rivelando una capra (i numeri delle porte scelta e aperta sono scelti senza perdita di generalità). Calcolare la probabilità

$$P(\text{premio è dietro porta 1}|\text{porta 3 è aperta e contiene capra})$$

assumendo che

 (a) Monty sappia dietro che porta c'è il premio. Se il premio è dietro la porta 1 sceglie a caso che porta aprire, altrimenti apre l'unica porta non scelta e che contiene la capra.
 (b) Monty abbia dimenticato che porta contiene il premio (quindi apre una porta a caso)

11. Sia $s \in (1, \infty)$. La funzione zeta di Riemann è definita come segue

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Vogliamo dimostrare che

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_i (1 - p_i^{-s})}$$

dove $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$ sono i numeri primi (in ordine).

 (a) Si consideri lo spazio di probabilità $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, P)$ dove

$$P(A) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in A} \frac{1}{n^s}$$

 per ogni $A \in 2^{\mathbb{N}}$. Dimostrare che $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, P)$ è uno spazio di probabilità
 (b) Sia p un numero primo, e $N_p := \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ è diviso da } p\}$. Calcolare $P(N_p)$
 (c) Dimostrare che gli eventi $\{N_{p_i}\}_{i \geq 1}$ sono mutualmente indipendenti
 (d) Calcolare $P(\cap_{i \geq 1} N_{p_i}^c)$ e dedurre il risultato desiderato

12. Ci sono n candidati per un posto di lavoro. Si ammetta che i candidati possano essere ordinati dal migliore al peggiore. L'esaminatrice incontra sequenzialmente n candidati, uno dopo l'altro, in ordine casuale. L'esaminatrice deve scegliere se accettare o rifiutare ogni candidato alla fine del colloquio corrispondente, senza possibilità di tornare indietro e cambiare la propria decisione. La strategia utilizzata (chiamata strategia k) è la seguente: si intervistano e rifiutano automaticamente k candidati e dopodiché si assume il primo candidato che è "meglio" di tutti i precedenti (inclusi i primi k). Se non c'è un tale candidato, viene assunto l'ultimo candidato. Il parametro k è scelto e fissato prima dell'inizio dei colloqui.

 (a) Per n fisso, calcolare la probabilità che la strategia k porti all'assunzione del miglior candidato per $k \in \{1, \ldots, n\}$,
 (b) Per valori grandi di n sia k^* il valore di k che massimizza la probabilità di assumere il miglior candidato. Si esprima k^* come funzione di n. [1]
 (c) Si trovi il limite k^*/n per $n \to \infty$.

[1] **Suggerimento:** Per n grande si approssimi $\frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{(j-1)/n} \approx \int_{k/n}^{1} \frac{1}{x} dx$

Probabilità condizionata e indipendenza.

Def: Dato $B \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(B) > 0$ la prob. condizionata di $A \in \mathcal{F}$ dato B è

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Prop (formula della partizione / prob. totale): Sia $\{B_i\}_{i=1}^n$ una partizione di Ω, allora $\forall A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Prop (formula di Bayes): Siano $A, B \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$

allora $$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Cor: $A \in \mathcal{F}$, $\{B_i\}_{i=1}^n$ partizione di Ω, allora

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)} \qquad \forall i \in \{1, \dots n\}$$

Def: $A, B \in \mathcal{F}$ sono indipendenti $(A \perp\!\!\!\perp B)$ se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Oss: $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B$

Def: $(A_i)_{i \in I}$ è una famiglia di eventi indipendenti se $\forall J \subseteq I$ finito

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

1. Un giocatore lancia due dadi. Se il risultato del lancio del primo dado è 3, qual è la probabilità che la somma dei risultati sia almeno 6? Rispondere a questa domanda facendo uso esplicito della definizione di probabilità condizionata.

$A = \{\text{primo dado} + \text{secondo dado} \geq 6\}$

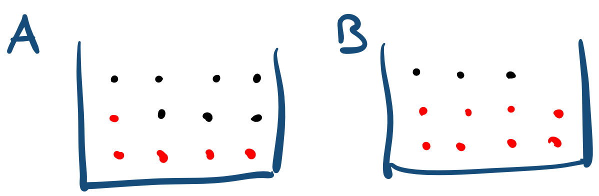
$B = \{\text{primo dado} = 3\}$, $\quad C = \{\text{secondo dado} \geq 3\}$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} \overset{(*)}{=} \frac{\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(B)}$$

$A \cap B = B \cap C \qquad = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{3}$

$$(*) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{4}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

2. Due contenitori contengono rispettivamente il primo, 5 palline rosse e 7 nere, il secondo 8 palline rosse e 3 nere. Si sceglie a caso un contenitore e da esso si estraggono due palline, che risultano essere entrambe rosse. Qual è la probabilità che le palline siano state estratte dal primo contenitore?



$\Omega = \{(\omega_0, \omega_1, \omega_2) : \omega_0 \in \{A, B\}\}$

$$\mathbb{P}(\{\omega_0 = A\} \mid \{(\omega_1, \omega_2) = (r, r)\}) = \frac{\mathbb{P}(\{\omega_0 = A\} \cap \{(\omega_1, \omega_2) = (r, r)\})}{\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2) = (r, r)\})}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2) = (r, r)\} \mid \{\omega_0 = A\})\, \mathbb{P}(\{\omega_0 = A\})}{\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2) = (r, r)\} \mid \{\omega_0 = A\})\, \mathbb{P}(\{\omega_0 = A\}) + \mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2) = (r, r)\} \mid \{\omega_0 = A\})\, \mathbb{P}(\{\omega_0 = A\})}$$

$$= \frac{\frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 11} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 11} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8 \cdot 7}{11 \cdot 10} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{14}{5} \cdot \frac{6}{5}} \simeq 0.229$$

3. Due dadi vengono tirati. Consideriamo i tre seguenti eventi:

$$A = \text{il primo dado dà un numero dispari},$$
$$B = \text{il secondo dado dà un numero pari},$$
$$C = \text{la somma dei due risultati è pari}.$$

(a) Dire se i tre eventi A, B, C sono indipendenti.

(b) Dire se sono a due a due indipendenti.

a) Verifichiamo se si applica la definizione di indip.

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\phi) = 0$$

$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

$\Rightarrow$ gli eventi non sono collettivamente indipendenti

b) $\Omega = \{(w_1, w_2) : a, b \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ $\qquad \mathbb{P}(w) = \frac{1}{36}$

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{(w_1, w_2) : w_1 \text{ pari},\ w_2 \text{ dispari}\}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(A \cap C) =$ ——— " ——— $= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(B \cap C) =$ ——— " ——— $= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \Rightarrow A \perp B$
- $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \Rightarrow A \perp C$
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \Rightarrow B \perp C$

4. Sappiamo che il 4% della popolazione è affetto da una certa malattia. Abbiamo a disposizione un test con le seguenti caratteristiche: se la persona è malata, il test è positivo con probabilità pari a 0.95, se la persona è sana, il test è positivo con probabilità pari a 0.15.

   (a) Qual è la probabilità che una persona sia malata se è risultata positiva al test?

   (b) Qual è la probabilità che una persona sia sana se è risultata negativa al test?

$$\mathbb{P}(+\mid M) = 0.95 \qquad \mathbb{P}(+\mid S) = 0.15 \qquad \mathbb{P}(M) = 0.04$$

a) $$\mathbb{P}(M\mid +) = \frac{\mathbb{P}(+\mid M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(+)} = \frac{\mathbb{P}(+\mid M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(+\mid M)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(+\mid S)\,\mathbb{P}(S)}$$

$$\mathbb{P}(+) = \mathbb{P}(+\mid M)\cdot\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(+\mid S)\,\mathbb{P}(S)$$

$$= 0.86$$

b) $$\mathbb{P}(S\mid -) = \frac{\mathbb{P}(-\mid S)\,\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(-)} = \frac{\mathbb{P}(-\mid S)\,\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(-\mid S)\,\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(-\mid M)\,\mathbb{P}(M)}$$

$$\mathbb{P}(-) = \mathbb{P}(-\mid S)\,\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(-\mid M)\,\mathbb{P}(M)$$

$$= 0.94$$

5. Una coppia ha due figli.

   (a) Se almeno uno dei due è maschio, qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?

   (b) Se il secondogenito è maschio, qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?

Assumiamo che il sesso dei figli sia indip.

a) $\mathbb{P}(\{\text{entrambi maschi}\} \mid \{\text{almeno un maschio}\}) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{\text{entrambi maschi}\} \cap \{\text{almeno un maschio}\})}{\mathbb{P}(\{\text{almeno un maschio}\})} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}$$

b) $\mathbb{P}(\{\text{entrambi maschi}\} \mid \{\text{secondo maschio}\}) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{\text{entrambi maschi}\} \cap \{\text{secondo maschio}\})}{\mathbb{P}(\{\text{secondo maschio}\})} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

6. Siano A, B, C tre eventi. Consideriamo le due affermazioni

H_1 : "A, B sono indipendenti" e

H_2 : "A, B sono indipendenti condizionatamente a C" (ovvero $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$).

(a) Vale l'implicazione $H_1 \Rightarrow H_2$?

(b) Vale l'implicazione $H_2 \Rightarrow H_1$?

(c) Sotto quali ipotesi su C vale $H_1 \Leftrightarrow H_2$?

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \overset{?}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(A \cap B | C) = \mathbb{P}(A|C) \cdot \mathbb{P}(B|C)$$

a) no : $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$ $C = \{2,3\}$ $\Omega = \{1,2,3,4\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4}$$
$$= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

b) no : $\Omega = \{1,2,3,4\}$ $A = \{1,2\}$ $B = \{1,2\}$, $C = \{1\}$

$$\mathbb{P}(A|C) = 1 \qquad \mathbb{P}(B|C) = 1 \qquad \mathbb{P}(A \cap B|C) = 1$$
$$= \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

c) $C \perp\!\!\!\perp A, B, A \cap B$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(A \cap B | C) = \mathbb{P}(A \cap B) \overset{H_1}{=} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A|C) \cdot \mathbb{P}(B|C)$$

7. Mostrare che, se A, B e C sono eventi indipendenti, allora $A \cap B$ e C sono eventi indipendenti. Mostrare che il viceversa non vale. Mostrare lo stesso per $A \cup B$ e C.

a) "$\Longrightarrow$" $\quad \mathbb{P}((A\cap B)\cap C) = \mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \underbrace{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)}_{\mathbb{P}(A\cap B)}\cdot\mathbb{P}(C)$

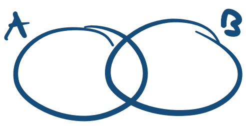
$$= \mathbb{P}(A\cap B)\cdot\mathbb{P}(C)$$

"$\not\Longleftarrow$" Controesempio: $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{4}$

$A = \{2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2,3\}$

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(\phi) = 0 = 0\cdot\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A\cap B)\,\mathbb{P}(C)$$

b) "$\Longrightarrow$" $\quad \mathbb{P}((A\cup B)\cap C) = \mathbb{P}(((A\cap B)\cup(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c))\cap C)$



$$= \mathbb{P}((A\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C)) =$$

$$\begin{cases} p_A = \mathbb{P}(A) \\ p_B = \mathbb{P}(B) \\ p_C = \mathbb{P}(C) \end{cases}$$

$$= \mathbb{P}(A\cap B\cap C) + \mathbb{P}(A^c\cap B\cap C) + \mathbb{P}(A\cap B^c\cap C)$$

$$= p_A p_B p_C + (1-p_A)p_B p_C + p_A(1-p_B)p_C \pm p_A p_B p_C$$

$$= \mathbb{P}(C)\left[p_B + p_A - p_A p_B\right] = \mathbb{P}(C)\,\mathbb{P}(A\cup B)$$

Alternativa: $\mathbb{P}((A\cup B)\cap C) = \mathbb{P}((A\cap C)\cup(A\cap B)) = \mathbb{P}(A\cap C) + \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A\cap B\cap C) =$

"$\not\Longleftarrow$" Controesempio: $\Omega = \{1,2,3,4\}$ $\quad \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{4}$

$A = \{3\}$ $\quad B = \{2\}$ $\quad C = \{3,4\}$

$$\mathbb{P}((A\cup B)\cap C) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbb{P}(A\cup B)\cdot\mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)$$

8. Un mago dice di possedere una moneta magica che alterna perfettamente tra lanci risultanti in testa e croce (se la volta precedente ha dato testa, la prossima volta darà croce e vice versa con probabilità 1). Uno scettico, prima di vedere l'esperimento, pensa che ci sia solo l'1% di probabilità che la moneta abbia questa proprietà, e chiede al mago di convincerlo del contrario. Quanti lanci alternati dovranno essere osservati dallo scettico perche (secondo lui) la probabilità che la moneta abbia la proprietà professata dal mago sia maggiore del 99%?

$A_n = \{n \text{ lanci alternati}\}$

$B = \{\text{moneta sia magica}\}$.

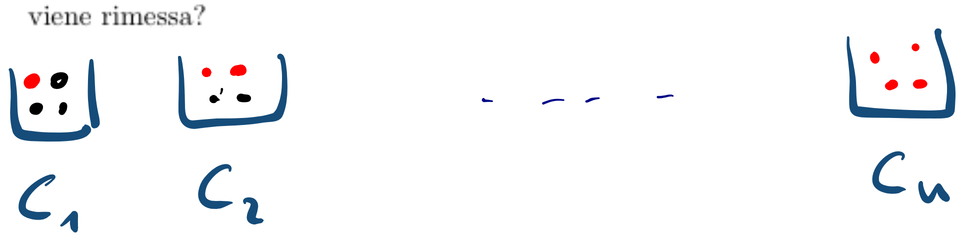
$\mathbb{P}(A_n | B)$

$$0.99 \leq \mathbb{P}(B | A_n) = \frac{\mathbb{P}(A_n | B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A_n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_n | B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A_n | B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_n | B^c) \cdot \mathbb{P}(B^c)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 0.01}{1 \cdot 0.01 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 0.99} = 0.99$$

9. Ci sono n contenitori, numerati da 1 a n. Il contenitore k-esimo contiene k palline rosse e $n-k$ palline nere. Si sceglie a caso un contenitore e da questo si estrae una pallina. Qual è la probabilità che la pallina sia rossa? Si eseguono due estrazioni, ognuna con la medesima modalità usata in precedenza. Qual è la probabilità che entrambe le palline siano rosse, se dopo la prima estrazione la pallina estratta viene rimessa nel contenitore da cui era stata estratta? Qual è la probabilità se invece la pallina non viene rimessa?



$$\mathbb{P}(\text{rosse}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\text{rosse} \mid C_j) \cdot \mathbb{P}(C_j) =$$

b) 2 rosse

Richiamo: per una lista $B_1 \dots B_n$ con $B_j \cap B_k = \emptyset$ $j \neq k$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A \cap B_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_j)\,\mathbb{P}(B_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

b) $$\mathbb{P}(2\ \text{rosse}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(2\ \text{rosse} \mid C_j)\,\underbrace{\mathbb{P}(C_j)}_{1/n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} \cdot \frac{j}{n} \quad \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{n^{\cancel{3}2}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= (n+1)(2n+1)/6n^2$$

10. (Monty Hall 2.0) Risolvere il problema 10 del foglio di esercizi 1 usando la formula di Bayes: Assumiamo che tu abbia scelto la porta 1 e che Monty abbia aperto la porta 3 rivelando una capra (i numeri delle porte scelta e aperta sono scelti senza perdita di generalità). Calcolare la probabilità

$$P(\text{premio è dietro porta 1}|\text{porta 3 è aperta e contiene capra})$$

assumendo che

(a) Monty sappia dietro che porta c'è il premio. Se il premio è dietro la porta 1 sceglie a caso che porta aprire, altrimenti apre l'unica porta non scelta e che contiene la capra.

(b) Monty abbia dimenticato che porta contiene il premio (quindi apre una porta a caso)

In entrambi i casi vale che.

$$\mathbb{P}(\{\text{premio } 1\}|\{\text{porta 3 aperta}\}\cap\{\text{capra } 3\}) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{\text{premio } 1\}\cap\{\text{porta 3 aperta}\}\cap\{\text{capra } 3\})}{\mathbb{P}(\{\text{porta 3 aperta}\}\cap\{\text{capra } 3\})}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{\text{premio } 1\}\cap\{\text{3 aperta}\}\cap\cancel{\{\text{capra } 3\}})}{\mathbb{P}(\{\text{3 aperta}\}\cap\cancel{\{\text{capra } 3\}}\cap\{\text{premio } 1\}) + \mathbb{P}(\{\text{3 ap}\}\cap\cancel{\{\text{capra } 3\}}\cap\{\text{premio } 2\}) + 0}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{\text{3 aperta}\}|\{\text{premio } 1\})\cdot\cancel{\mathbb{P}(\{\text{premio } 1\})}}{\mathbb{P}(\{\text{3 aperta}\}|\{\text{premio } 1\})\cancel{\mathbb{P}(\{\text{premio } 1\})} + \mathbb{P}(\{\text{3 aperta}\}|\{\text{premio } 2\})\cancel{\mathbb{P}(\{\text{premio } 2\})}} = (*)$$

a) $\mathbb{P}(\{\text{3 aperta}\}|\{\text{premio } 2\}) = 1$

$\mathbb{P}(\{\text{3 aperta}\}|\{\text{premio } 1\}) = 1/2 \implies (*) = \dfrac{1/2}{1+1/2} = \dfrac{1}{3}$

b) $\mathbb{P}(\{\text{3 aperta}\}|\{\text{premio } 2\}) = 1/2$

$\mathbb{P}(\{\text{3 aperta}\}|\{\text{premio } 1\}) = 1/2 \implies (*) = \dfrac{1/2}{1/2+1/2} = \dfrac{1}{2}$

11. Sia $s \in (1, \infty)$. La funzione zeta di Riemann è definita come segue

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Vogliamo dimostrare che

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_i (1 - p_i^{-s})}$$

dove $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$ sono i numeri primi (in ordine).

(a) Si consideri lo spazio di probabilità $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, P)$ dove

$$P(A) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in A} \frac{1}{n^s}$$

per ogni $A \in 2^{\mathbb{N}}$. Dimostrare che $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, P)$ è uno spazio di probabilità

(b) Sia p un numero primo, e $N_p := \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ è diviso da } p\}$. Calcolare $P(N_p)$

(c) Dimostrare che gli eventi $\{N_{p_i}\}_{i \geq 1}$ sono mutualmente indipendenti

(d) Calcolare $P(\cap_{i \geq 1} N_{p_i}^c)$ e dedurre il risultato desiderato

a) $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$ è una σ-algebra su $\mathbb{N}$

Verifichiamo che $\mathbb{P}$ soddisfa gli assiomi di Kolmogorov:

i) $\frac{1}{n^s} \geq 0 \implies 0 \leq \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in A} \frac{1}{n^s} \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{F}$.

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = 1$ per definizione

iii) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m} n^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in A_m} n^{-s}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in A_m} n^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_m)$$

b) $\mathbb{P}(N_p) = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \sum_{n \in N_p} n^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k \in \mathbb{N}} (k \cdot p)^{-s} = p^{-s} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k \in \mathbb{N}} k^{-s} = p^{-s}$

c) Per ogni sottoinsieme $\{p_1, \dots p_k\}$ dei numeri primi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} N_{p_i}\right) = \mathbb{P}\left(N_{\prod_{i=1}^{k} p_i}\right) = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i\right)^{-s} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{-s}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(N_{p_i})$$

d) $$\bigcap_{i\geq 1} N_{p_i}^c = \{1\}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\zeta(s)} \cdot 1^{-s} = \mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\geq 1} N_{p_i}^c\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_{p_i}^c) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - p_i^{-s})$$

$$\Longrightarrow \zeta(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} (1-p_i^{-s})}$$

12. Ci sono n candidati per un posto di lavoro. Si ammetta che i candidati possano essere ordinati dal migliore al peggiore. L'esaminatrice incontra sequenzialmente n candidati, uno dopo l'altro, in ordine casuale. L'esaminatrice deve scegliere se accettare o rifiutare ogni candidato alla fine del colloquio corrispondente, senza possibilità di tornare indietro e cambiare la propria decisione. La strategia utilizzata (chiamata strategia k) è la seguente: si intervistano e rifiutano automaticamente k candidati e dopodiché si assume il primo candidato che è "meglio" di tutti i precedenti (inclusi i primi k). Se non c'è un tale candidato, viene assunto l'ultimo candidato. Il parametro k è scelto e fissato prima dell'inizio dei colloqui.

   (a) Per n fisso, calcolare la probabilità che la strategia k porti all'assunzione del miglior candidato per $k \in \{1, \dots, n\}$,

   (b) Per valori grandi di n sia k^* il valore di k che massimizza la probabilità di assumere il miglior candidato. Si esprima k^* come funzione di n. [1]

   (c) Si trovi il limite k^*/n per $n \to \infty$.

[1] **Suggerimento:** Per n grande si approssimi $\frac{1}{n}\sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{(j-1)/n} \approx \int_{k/n}^{1} \frac{1}{x} dx$

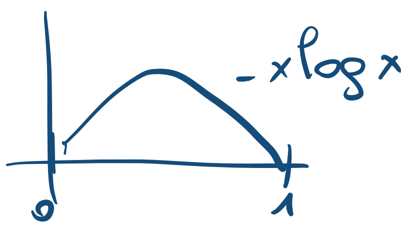
a) $\mathbb{P}(\text{miglior candidato}) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(j \text{ sia selezionato} \cap j \text{ sia il migliore})$$

$$= \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(j \text{ è selezionato} \mid j \text{ è il migliore}) \underbrace{\mathbb{P}(j \text{ è il migliore})}_{1/n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{k}{j-1} = \frac{k}{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{\frac{j-1}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

b) $$\mathbb{P}(\text{miglior candidato}) = \frac{k}{n} \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{\frac{j-1}{n}} \simeq \frac{k}{n} \int_{k/n}^{1} \frac{1}{x} dx$$



$$= -\frac{k}{n} \log \frac{k}{n} = -x \log x \Big|_{x=\frac{k}{n}}$$

$$\frac{d}{dx} x \log x = \log x + 1 = 0 \iff x = e^{-1}$$

massimo: $\frac{k}{n} = e^{-1} \implies k^* = e^{-1} \cdot n$

$$\implies \mathbb{P}(\text{miglior candidato}) = -e^{-1} \log e^{-1} = e^{-1}$$

Foglio di esercizi 3

Discussione soluzioni: 21.03.2022

1. In un contenitore ci sono 100 palline numerate da 1 a 100. Le estraiamo una dopo l'altra senza reinserimento.
   (a) Qual è la probabilità di ottenere nelle prime 10 estrazioni solo numeri ≤ 75?
   (b) Qual è la probabilità che le prime 15 palline estratte portino tutte un numero dispari?
2. Una moneta viene lanciata $2n$ volte. Sia t_n la probabilità che il numero di teste sia maggiore del numero di croci, e u_n la probabilità che il numero di teste sia pari al numero di croci.
   (a) Calcolare il limite di u_n per $n \to +\infty$.
   (b) Determinare il limite di t_n .
3. Il numero di telefonate X che arrivano ad una segreteria telefonica di un ufficio ogni 9 minuti è distribuito $X \sim \text{Pois}(6)$. Calcolare
   (a) la probabilità che arrivino almeno 5 chiamate in 9 minuti;
   (b) la probabilità che non arrivi nessuna chiamata tra le ore 9:00 e le ore 9:09
4. (distribuzione multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, \ldots, p_k)$). Consideriamo un esperimento di n prove indipendenti ove ogni prova può avere uno solo tra k possibili risultati, ognuno dei quali ha probabilità rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (e $p_1 + \cdots + p_k = 1$) di accadere. Calcolare la probabilità $p(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ che si abbiano n_1 esiti del tipo 1, n_2 esiti del tipo $2, \ldots, n_k$ esiti del tipo k, al variare delle k-uple $(n_1, \ldots, n_k)$ per cui $n_1 + \cdots + n_k = n$.
5. Consideriamo un esperimento a prove ripetute indipendenti con probabilità di successo p. Determinare la probabilità che
   (a) il primo successo avvenga alla prova k;
   (b) il primo successo avvenga dopo almeno k prove;
   (c) il primo successo avvenga prima della $(k+1)$-esima prova;
   (d) il primo successo avvenga in una prova dispari;
   (e) il primo successo non avvenga mai.
6. Un generatore di numeri casuali produce una successione di terne (i, j, k), con $i, j, k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Indichiamo con S l'evento "esce un tris" (ovvero una terna costituita da cifre tutte uguali). Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
   (a) tra le prime 10 terne prodotte ci sono almeno due tris
   (b) si devono produrre almeno 10 terne per ottenere due tris
   (c) si devono produrre esattamente 40 terne per avere 3 tris (ovvero il terzo tris si ha esattamente alla 40-esima terna prodotta).
7. Un collezionista ha già raccolto 60 delle 100 figurine di un album. Egli acquista una busta contenente 24 figurine (tutte diverse), tra le quali naturalmente ve ne possono essere alcune che egli già possiede. Qual'è la probabilità che tra le figurine appena comprate ve ne siano almeno 20 che già possiede?
8. Siano dati due esperimenti a prove ripetute indipendenti con probabilità di successo rispettivamente p_1 e p_2 che siano indipendenti tra loro.

(a) Qual è la probabilità che il primo successo del primo esperimento avvenga prima del primo successo del secondo?

(b) Assumiamo ora che vengano fatte 5 prove per esperimento. Calcolare la probabilità che il numero di successi nel primo gruppo sia maggiore o uguale al numero di successi nel secondo.

9. Consideriamo un'urna con N palline, di cui N_1 sono rosse, mentre $N - N_1$ sono di colore diverso dal rosso. Consideriamo l'esperimento che consiste nell'estrazione di $n \leq N$ palline, in cui il "successo" è l'estrazione di una pallina rossa.

   Sia W_n la variabile aleatoria che conta il numero di palline rosse estratte tra le n. Determinare il range di W_n e la funzione di probabilità p_{W_n} associata.

10. Sia X una variabile aleatoria discreta a valori interi positivi; si dice che X gode della proprietà di perdita di memoria se

$$\mathbb{P}(X > n + k \,|\, X > k) = \mathbb{P}(X > n) \quad \text{per ogni } n, k \in \mathbb{N}^*$$

   (a) Si mostri che se $X \sim \mathrm{Geom}'(p)$, ovvero $p_{X'}(k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$, allora X soddisfa la proprietà di perdita di memoria.

   (b) Vale anche il viceversa, ovvero: se X è una variabile discreta a valori interi positivi che soddisfa la proprietà di perdita di memoria, allora $X \sim \mathrm{Geom}'(p)$ per un qualche $p \in (0, 1)$. [1]

11. (Urna di Polya) Si consideri di un'urna che contiene inizialmente due palline, una rossa e una verde. Si estrare una pallina, quindi la si reimmette nell'urna, aggiungendone poi un'altra dello stesso colore di quella estratta. Si itera quindi questa procedura di estrazione/reimmissione. Sia X_n il numero di palline rosse presenti nell'urna dopo n iterazioni. Calcolare la legge di X_n per ogni $N \in \mathbb{N}$.

12. Ci sono sei tazzine da caffé con corrispondenti piattini. Due sono di colore bianco (b), due rosso (r) e due oro (o). Disponiamo i piattini in ordine sul tavolo nella sequenza *bbrroo*. Poi arriva una persona nonvedente e dispone le tazzine a caso sui piattini. Sia M il numero di tazzine il cui colore corrisponde a quello del piattino sul quale sono state disposte.

   (a) Calcolare $\mathbb{P}(M = 4)$.

   (b) (Opzionale) Calcolare la distribuzione della variabile aleatoria M.

[1] Suggerimento : se $p = prob(X = 1)$, poiché $X > 0$, allora $\mathbb{P}(X > 1) = 1 - p$

Thm: Sia $\{p_n\}$ una successione di numeri reali in $(0,1)$ tali che $\lim_{n\to\infty} n p_n = \lambda > 0$. allora per ogni $k \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

ovvero sotto le condizioni del teorema la distribuzione binomiale converge verso quella di Poisson:

$$\lambda_n := n p_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \qquad \Longrightarrow \qquad Bin(n, p_n) \xrightarrow{n\to\infty} Pois(\lambda)$$

Dim: $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k \cancel{+ O(n^{k-1})}}{k!} \frac{\lambda_n^k}{\cancel{n^k}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^k}_{\to 1}$$

$$= \frac{\left(\lim_{n\to\infty} \lambda_n\right)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

1. In un contenitore ci sono 100 palline numerate da 1 a 100. Le estraiamo una dopo l'altra senza reinserimento.

   (a) Qual è la probabilità di ottenere nelle prime 10 estrazioni solo numeri ≤ 75?

   (b) Qual è la probabilità che le prime 15 palline estratte portino tutte un numero dispari?

2. Una moneta viene lanciata $2n$ volte. Sia t_n la probabilità che il numero di teste sia maggiore del numero di croci, e u_n la probabilità che il numero di teste sia pari al numero di croci.

   (a) Calcolare il limite di u_n per $n \to +\infty$.

   (b) Determinare il limite di t_n .

3. Il numero di telefonate X che arrivano ad una segreteria telefonica di un ufficio ogni 9 minuti è distribuito $X \sim \text{Pois}(6)$. Calcolare

   (a) la probabilità che arrivino almeno 5 chiamate in 9 minuti;

   (b) la probabilità che non arrivi nessuna chiamata tra le ore 9:00 e le ore 9:09

1) a) $\Omega = \{ S \subseteq \{1, \dots 100\}, |S| = 10 \}$ $\qquad P(S) = \frac{1}{|\Omega|}$

$$P(\{\text{solo} \leq 75\}) = \frac{|\{\text{solo} \leq 75\}|}{|\Omega|} = \frac{75!/65!}{100!/90!} \cong 0{,}4789$$

b) $\Omega' = \{ S \subseteq \{1, \dots 100\}, |S| = 15 \}$ $\qquad P(S) = \frac{1}{|\Omega'|}$

$$P(\{\text{solo dispari}\}) = \frac{|\{\text{solo dispari}\}|}{|\Omega|} = \frac{50!/35!}{100!/85!} \cong 8.89 \cdot 10^{-6}$$

2) a) $$u_n = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{2n!}{n!\,n!} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]^2} \cdot \frac{1}{4^n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{2^{2n} n^{2n} \cdot e^{-2n}}{n^{2n} \cdot e^{-2n}} \cdot \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

b) $2t_n + u_n = 1 \implies t_n = \frac{1 - u_n}{2} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2}$

3) $$P(X = k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \qquad \mu = 6$$

a) $\implies P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} P(X = k) \cong 0.7149$

b) $P(X = 0) = e^{-6} \frac{6^0}{0!} \cong 0.002479$

4. (distribuzione multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, \ldots, p_k)$). Consideriamo un esperimento di n prove indipendenti ove ogni prova può avere uno solo tra k possibili risultati, ognuno dei quali ha probabilità rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (e $p_1 + \cdots + p_k = 1$) di accadere. Calcolare la probabilità $p(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ che si abbiano n_1 esiti del tipo 1, n_2 esiti del tipo 2, $\ldots$, n_k esiti del tipo k, al variare delle k-uple $(n_1, \ldots, n_k)$ per cui $n_1 + \cdots + n_k = n$.

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, k\}^n$$

$$\mathbb{P}((\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)) = \mathbb{P}(\omega_1) \cdot \mathbb{P}(\omega_2) \cdots \mathbb{P}(\omega_n)$$

$$= p_{\omega_1} \cdot p_{\omega_2} \cdots p_{\omega_n} = \prod_{j=1}^{k} p_j^{|\{i : \omega_i = j\}|}$$

$\Longrightarrow$ per $(n_1, \ldots, n_k)$ con $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$ ogni esito

$$W_{n_1 \ldots n_k} = \{\omega : |\{i : \omega_i = 1\}| = n_1, \ldots, |\{i : \omega_i = k\}| = n_k\}$$

ha probabilità $\prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j} = q(n_1 \ldots n_k)$

$$p(n_1, \ldots, n_k) = \mathbb{P}(W_{n_1 \ldots n_k}) = \sum_{\omega \in W_{n_1 \ldots n_k}} \mathbb{P}(\omega)$$

$$= |W_{n_1 \ldots n_k}| \cdot q(n_1 \ldots n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1! \, n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

$$|W_{n_1 \ldots n_k}| = \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n - n_1}{n_2} \binom{n - n_1 - n_2}{n_3} \cdots \binom{n - n_1 - \cdots - n_{k-1}}{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1! \, \cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2! \, \cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3! \, \cancel{(n \ldots)!}}$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

5. Consideriamo un esperimento a prove ripetute indipendenti con probabilità di successo p. Determinare la probabilità che

(a) il primo successo avvenga alla prova k;
(b) il primo successo avvenga dopo almeno k prove;
(c) il primo successo avvenga prima della $(k+1)$-esima prova;
(d) il primo successo avvenga in una prova dispari;
(e) il primo successo non avvenga mai.

X = prova a cui avviene il primo successo.

a) $P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

b) $\boxed{\underline{\text{Nota}}: \; X \sim \text{Geom}'(p) \longrightarrow \mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n \quad \forall n \geq 0}$

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p \sum_{j'=n}^{\infty} (1-p)^{j'} = p \sum_{j''=0}^{\infty} (1-p)^n (1-p)^{j''}$$

$$= (1-p)^n \, p \sum_{j''=0}^{\infty} (1-p) = (1-p)^n \cdot p \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

c) $P(X < k+1) = 1 - \mathbb{P}(X > k) = 1 - (1-p)^k$

d) $$\mathbb{P}\left(\frac{X+1}{2} \in \mathbb{N}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^{2k}$$

$$= p \sum_{k=0}^{\infty} \left[(1-p)^2\right]^k = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$$

e) $\lim_{n\to\infty} P(X > n) = \lim_{n\to\infty} (1-p)^n = 0.$

6. Un generatore di numeri casuali produce una successione di terne (i, j, k), con $i, j, k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Indichiamo con S l'evento "esce un tris" (ovvero una terna costituita da cifre tutte uguali). Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

   (a) tra le prime 10 terne prodotte ci sono almeno due tris

   (b) si devono produrre almeno 10 terne per ottenere due tris

   (c) si devono produrre esattamente 40 terne per avere 3 tris (ovvero il terzo tris si ha esattamente alla 40-esima terna prodotta).

$$p = \mathbb{P}(\text{tris}) = \sum_{j=0}^{9} P(\text{tris di } j) = 10 \cdot \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10^2}$$

a) $Y_{10} = \#$ terne con tris su 10 terne. $\sim Bin(10, p)$

$$\longrightarrow \mathbb{P}(Y_{10} \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(Y_{10} = 0) - \mathbb{P}(Y_{10} = 1)$$

$$= 1 - (1 - 10^{-2})^{10} - 10 \cdot 10^{-2}(1 - 10^{-2})^9 \simeq 0{,}00426$$

b) $\{\#$ terne necessarie per il secondo successo $\geq 10\}$

$= \{\#$ successi nei primi 9 tentativi $\leq 1\} = \{X \leq 1\}$

$X = \#$ successi nei primi 9 tentativi

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1-p)^{10} + 10 \cdot p(1-p)^9$$

c) $Z = \#$ terne prodotte al terzo tris $\sim BinNeg(m, p)$

$$\mathbb{P}(Z_m = k) = p_m(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}$$ (istante m-esimo successo).

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(Z_3 = 40) = \binom{39}{2} (10^{-2})^3 (1 - 10^{-2})^{37} \simeq 0{,}00051$$

7. Un collezionista ha già raccolto 60 delle 100 figurine di un album. Egli acquista una busta contenente 24 figurine (tutte diverse), tra le quali naturalmente ve ne possono essere alcune che egli già possiede. Qual'è la probabilità che tra le figurine appena comprate ve ne siano almeno 20 che già possiede?

Estrazione senza reinserimento da $\Omega_0 = \{1, \dots, 100\}$

$\Omega = \{ S \subseteq \Omega_0 \, , \, |S| = 24 \}$. $S_0 \subset \Omega_0$ figurine già raccolte, $|S_0| = 60$

$$\mathbb{P}(|S \cap S_0| \geq 20) = \sum_{j=20}^{24} \mathbb{P}(|S \cap S_0| = j)$$

$$= \sum_{j=20}^{24} \frac{\binom{60}{j}\binom{40}{24-j}}{\binom{100}{24}} \simeq 0.00594$$

8. Siano dati due esperimenti a prove ripetute indipendenti con probabilità di successo rispettivamente p_1 e p_2 che siano indipendenti tra loro.

   (a) Qual è la probabilità che il primo successo del primo esperimento avvenga prima del primo successo del secondo?

   (b) Assumiamo ora che vengano fatte 5 prove per esperimento. Calcolare la probabilità che il numero di successi nel primo gruppo sia maggiore o uguale al numero di successi nel secondo.

Sia $X_1 \sim \mathrm{Geom}(p_1) \perp X_2 \sim \mathrm{Geom}(p_2)$

a) $$\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \mathbb{P}\left(X_1 < X_2, \bigcup_{k=1}^{\infty} X_1 = k\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_1 < X_2, X_1 = k\}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_2 > k, X_1 = k\}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_2 > k, X_1 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_2 > k) \cdot \mathbb{P}(X_1 = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p_2)^k \cdot p_1 (1-p_1)^{k-1}$$

$$= p_1(1-p_2) \sum_{k=\cancel{1}\,0}^{\infty} \left[(1-p_1)\cdot(1-p_2)\right]^{k\cancel{-1}} = \frac{p_1(1-p_2)}{1-(1-p_2)(1-p_1)}$$

b) $Y_1 \sim \mathrm{Bin}(5, p_1) \perp Y_2 \sim \mathrm{Bin}(5, p_2)$

$$P(Y_1 \geq Y_2) = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(Y_1 \geq k, Y_2 = k) = \sum_{k=0}^{4} P(Y_1 \geq k) \cdot \mathbb{P}(Y_2 = k)$$

$$= (1-(1-p_1)^5)(1-p_2)^5 +$$

$$+ (1-(1-p_1)^5 - 5(1-p_1)^4 p_1)\, 5 \cdot (1-p_2)^4 p_2$$

$$+ \left(1-(1-p_1)^5 - 5(1-p_1)^4 p_1 - \binom{5}{2}(1-p_1)^3 p_1^2\right)\binom{5}{2}(1-p_2)^3 p_2^2$$

$$+ \left(\binom{5}{4}(1-p_1)\, p_1^4 + p_1^5\right)\binom{5}{3}(1-p_2)^2 p_2^3$$

$$+ \; p_1^5 \binom{5}{4} p_2^4 (1-p_2)$$

9. Consideriamo un'urna con N palline, di cui N_1 sono rosse, mentre $N - N_1$ sono di colore diverso dal rosso. Consideriamo l'esperimento che consiste nell'estrazione di $n \leq N$ palline, in cui il "successo" è l'estrazione di una pallina rossa.

   Sia W_n la variabile aleatoria che conta il numero di palline rosse estratte tra le n. Determinare il range di W_n e la funzione di probabilità p_{W_n} associata.

Notiamo che $\mathbb{P}(W_n = k) > 0$ $(k \geq 0)$ solo se ci sono almeno k palline rosse $(N_1 \geq k)$ e $n-k$ di colore diverso.

$$N - N_1 \geq n - k \iff k \geq n - (N - N_1) = N_1 - (N - n)$$

$$\Longrightarrow \text{Range}(W_n) = \{k_0, k_0+1, \dots, N\} \qquad k_0 = \max\{0, N_1 - (N-n)\}$$

Per $k \in \text{Range}(W_n)$ otteniamo

$$p_{W_n}(k) = \mathbb{P}(W_n = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

10. Sia X una variabile aleatoria discreta a valori interi positivi; si dice che X gode della proprietà di perdita di memoria se

$$\mathbb{P}(X > n + k \,|\, X > k) = \mathbb{P}(X > n) \quad \text{per ogni } n, k \in \mathbb{N}^*$$

(a) Si mostri che se $X \sim \text{Geom}'(p)$, ovvero $p_{X'}(k) = p(1-p)^{k-1}$, $\quad k = 1, 2, \ldots$, allora X soddisfa la proprietà di perdita di memoria.

(b) Vale anche il viceversa, ovvero: se X è una variabile discreta a valori interi positivi che soddisfa la proprietà di perdita di memoria, allora $X \sim \text{Geom}'(p)$ per un qualche $p \in (0,1)$. [1]

<u>Nota</u>: $X \sim \text{Geom}'(p) \implies \mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n \quad \forall n \geq 0$

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p \sum_{j'=n}^{\infty} (1-p)^{j'} = p \sum_{j''=0}^{\infty} (1-p)^n (1-p)^{j''}$$

$$= (1-p)^n \, p \sum_{j''=0}^{\infty} (1-p) = (1-p)^n \cdot p \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

a) $$\mathbb{P}(X > n+k \,|\, X > k) = \mathbb{P}(X > n+k, X > k) \cdot \mathbb{P}(X > k)^{-1}$$

$$= \mathbb{P}(X > n+k) \cdot \mathbb{P}(X > k)^{-1}$$

$$= (1-p)^{n+k} \cdot (1-p)^{-k} = (1-p)^n = \mathbb{P}(X > n)$$

b) Sia $f(k) = \mathbb{P}(X > k)$. $\implies f$ è decrescente

$$\mathbb{P}(X > n+k) \cdot \mathbb{P}(X > k)^{-1} = \mathbb{P}(X > n+k \,|\, X > k) \overset{!}{=} \mathbb{P}(X > n)$$

$\implies f(n+k) = f(n) \cdot f(k)$

In particolare $f(n+1) = f(n) \cdot f(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\quad f(0) \overset{A1}{=} 1$

$\implies f(n) = f(0) \cdot f(1)^n = 1 \cdot q^n \quad$ per un $q \in (0,1)$

$$\implies \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(\{X_n > k-1\} \cap \{X_n > k\}^c) = \mathbb{P}(X_n > k-1) - \mathbb{P}(X_n > k)$$

$$= q^{k-1} - q^k = (1-q)\, q^{k-1} = p(1-p)^{k-1}$$

scrivo $q = 1-p$ per un $p \in (0,1)$

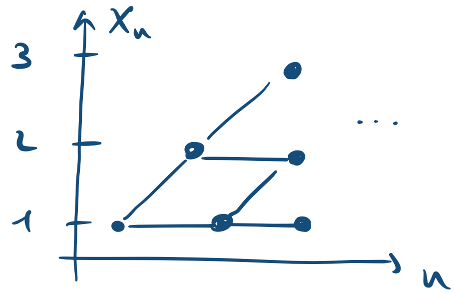
11. (Urna di Polya) Si consideri di un'urna che contiene inizialmente due palline, una rossa e una verde. Si estrare una pallina, quindi la si reimmette nell'urna, aggiungendone poi un'altra dello stesso colore di quella estratta. Si itera quindi questa procedura di estrazione/reimmissione. Sia X_n il numero di palline rosse presenti nell'urna dopo n iterazioni. Calcolare la legge di X_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Vediamo che $\quad X_n \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

- $P(X_2 = 1) = 1 \qquad \mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 2) = 0$
- $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X_3 = 0) = \mathbb{P}(X_3 = 3) = 0$

Meglio: $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_2 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1)$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$



- $\mathbb{P}(X_4 = 1) = \mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_3 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X_4 = 2) = \mathbb{P}(X_4 = 2 \mid X_3 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_4 = 2 \mid X_3 = 2)\mathbb{P}(X_3 = 2)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$\mathbb{P}(X_4 = 3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\Longrightarrow$ Claim: $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n-1} \qquad n \geq 2$

Proof: Induction ($n = 2$ verificato)

$k \neq n-1, 0$: $\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1) =$

$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k)\mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k+1)\mathbb{P}(X_n = k+1)$$

$$= \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{n-(k+1)}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

$k = n-1$: $\mathbb{P}(X_{n+1} = n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = n \mid X_n = n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$

12. Ci sono sei tazzine da caffé con corrispondenti piattini. Due sono di colore bianco (b), due rosso (r) e due oro (o). Disponiamo i piattini in ordine sul tavolo nella sequenza *bbrroo*. Poi arriva una persona nonvedente e dispone le tazzine a caso sui piattini. Sia M il numero di tazzine il cui colore corrisponde a quello del piattino sul quale sono state disposte.

   (a) Calcolare $\mathbb{P}(M = 4)$.

   (b) (Opzionale) Calcolare la distribuzione della variabile aleatoria M.

$\Omega = \{$permutazioni distinguibili di $(bbrroo)\}$

$$|\Omega| = \frac{6!}{(2!)^3} = 90$$

a) rappresentiamo con (abc) un risultato dove a tazzine bianche, b rosse e c oro sono su un piattino del colore giusto

Abbiamo $\{M=4\} = \{(2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)\}$.

(configurazione $(2,2,0)$ è impossibile)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(M=4) = 3 \cdot \frac{|\{\text{conf. } (2,1,1)\}|}{90} =$$

$$= 3 \, \frac{|\{bbroro, bbroor, bboror, bborro\}|}{90} = \frac{12}{90}$$

Foglio di esercizi 4

Discussione soluzioni: 28.03.2023

1. Sia X una v.a. che prende valori

$$X = \begin{cases} -1, & \text{con probabilità } 1/4; \\ 1, & \text{con probabilità } 1/8; \\ 3, & \text{con probabilità } 5/8. \end{cases}$$

   (a) Calcolare la densità discreta di X.
   (b) Calcolare la funzione di ripartizione di X.
   (c) Calcolare i valori attesi $E(X)$, $E(X^4 + 1)$.

2. Se X e Y sono due variabili aleatorie che rappresentano i risultati del lancio di due dadi, determinare distribuzione, media, moda e mediana di $X - 2Y$. Dire infine se $X - 2Y$ è indipendente da $X + Y$.

3. Si lanci un dado con risultato $N \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e si lanci poi una moneta N volte. Sia X il numero di teste ottenute. Calcolare la densità discreta di X e il valore atteso $\mathbb{E}(X)$.

4. (a) Mostrare che, se X e Y sono due variabili aleatorie e X è costante, allora X e Y sono indipendenti.
   (b) Siano X, Y variabili aleatorie tali che X^2 e Y^2 sono indipendenti. Possiamo concludere che anche X e Y sono indipendenti?

5. Se le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3, X_4 rappresentano i lanci successivi di un dado, calcolare

$$E[(X_1 + X_2)(X_3 + X_4)]$$

6. In un contenitore ci sono sei palline numerate da 1 a 6. Ne vengono estratte due senza reimmissione. Determinare legge congiunta, le leggi marginali e i corrispondenti valori di media e varianza delle seguenti variabili aleatorie:
   (a) $X =$ "massimo tra i due valori ottenuti",
   (b) $Y =$ "minimo tra i due valori ottenuti".

7. Sia X una variabile aleatoria a valori reali con densità discreta

$$\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n} \qquad (n \geq 1)$$

   (a) Determinare la probabilità dei seguenti eventi:
      i. $X \geq 1$;
      ii. $X \geq \frac{1}{10}$;
      iii. $X \leq 0$;
      iv. $0 \leq X < \frac{1}{2}$.
   (b) Trovare $\mathbb{E}(X)$

   Ripetere il punto (b) per la variabile aleatoria Y con densità discreta

$$\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \qquad (n \geq 1)$$

   e

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n} \qquad (n \geq 2)$$

8. (a) Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{N}$. Dimostrare l'uguaglianza

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k)\,.$$

(b) Ci sono b palline blu e r palline rosse in un contenitore. Le palline vengono estratte a caso una dietro l'altra fino a quando esce una pallina blu. Mostrare che il valore atteso del numero di estrazioni effettuate è $\frac{b+r+1}{b+1}$.

(c) Generalizziamo il punto (a): sia Y una variabile aleatoria discreta a valori reali positivi con $\operatorname{range}(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$ (potenzialmente infinito contabile), e assumiamo che $x_1 < x_2 < \dots$. Assumiamo che $\mathbb{E}(X)$ esista, dimostrare l'uguaglianza

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^{\infty} (x_{j+1} - x_j)\mathbb{P}(X > x_j)$$

dove $x_0 := 0$.

9. Sia p un numero primo, si ponga $\Omega = \{1, 2, \dots, p\}$ e si consideri Ω come spazio di probabilità uniforme. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti definite su Ω. Dimostrare che almeno una delle due variabile aleatoria X, Y è costante. Questo risultato è vero se p non è primo? Fornire opportuni controesempi.

10. (Opzionale) Sia $e(p) = \mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n))$, con $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti e con distribuzione di Bernoulli di parametro p, e $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ una funzione crescente nel senso seguente: vale $f(x) \le f(y)$ se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ soddisfano $x_k \le y_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Dimostrare che $e(p_1) \le e(p_2)$ per $p_1 \le p_2$.

Claim: $X \sim \mathrm{Pois}(\mu)$, $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

$$\Longrightarrow Z = X + Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda + \mu)$$

Proof:
$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X+Y=k, Y=l)$$
$$= \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-l, Y=l) = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-l)\,\mathbb{P}(Y=l)$$
$$= \sum_{l=0}^{k} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{l}}{l!} \, \frac{k!}{k!}$$
$$= e^{-(\mu+\lambda)} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} \mu^{k-l} \lambda^{l}}_{(\lambda+\mu)^k}$$

1. Sia X una v.a. che prende valori

$$X = \begin{cases} -1, & \text{con probabilità } 1/4; \\ 1, & \text{con probabilità } 1/8; \\ 3, & \text{con probabilità } 5/8. \end{cases}$$

   (a) Calcolare la densità discreta di X.

   (b) Calcolare la funzione di ripartizione di X.

   (c) Calcolare i valori attesi $E(X)$, $E(X^4+1)$.

2. Se X e Y sono due variabili aleatorie che rappresentano i risultati del lancio di due dadi, determinare distribuzione, media, moda e mediana di $X-2Y$. Dire infine se $X-2Y$ è indipendente da $X+Y$.

3. Si lanci un dado con risultato $N \in \{1,2,3,4,5,6\}$ e si lanci poi una moneta N volte. Sia X il numero di teste ottenute. Calcolare la densità discreta di X e il valore atteso $\mathbb{E}(X)$.

1) a) $p_X(-1) = \frac{1}{4}$ $\quad p_X(1) = \frac{1}{8}$ $\quad p_X(3) = \frac{5}{8}$

b) $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{4} & x \in [-1, 1) \\ \frac{3}{8} & x \in [1, 3) \\ 1 & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

c) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{range}(X)} x \cdot p_X(x) = -1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

$$\mathbb{E}(1+X^4) = 1 + \mathbb{E}(X^4) = 1 + \sum x^4 p_X(x) = 1 + (-1)^4 \frac{1}{4} + 1^4 \frac{1}{8} + 3^4 \frac{5}{8}$$

$$= 1 + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 81 \cdot \frac{5}{8} = 1 + \frac{408}{8} = 1 + 21 = 22$$

2) $\text{range}(X-2Y) = \{-11, -10, \dots 3, 4\}$

$$\mathbb{P}(X-2Y=-11) = \mathbb{P}(X=1, Y=6) = \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=6) = \frac{1}{6^2}$$

$$\mathbb{P}(X-2Y=-10) = \mathbb{P}(X=2, Y=6) = \frac{1}{6^2}$$

$$\mathbb{P}(X-2Y=-9) = \mathbb{P}(X=3, Y=6) + \mathbb{P}(X=1, Y=5) = \frac{2}{6^2}$$

Distribuzione uniforme $\longrightarrow$ basta contare il # casi

z	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	36
$\mathbb{P}$								$\cdot/36$									

mediana

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{z \in \text{range}(Z)} z \cdot \mathbb{P}(Z=z) = -3.5$$

$$\text{modo}(Z) = \underset{z \in \text{range}(Z)}{\text{argmax}} \ \mathbb{P}(Z=z) \longrightarrow \text{non definita}$$

$$\text{mediana}(Z) = -3.5$$

$$\mathbb{P}(X+Y=12, Z=-11) = 0$$

$$\mathbb{P}(X+Y=12) = \frac{1}{36} \qquad \mathbb{P}(Z=-11) = \frac{1}{36}$$

3) Y = risultato del dado, X = # teste. $\begin{cases} \text{range } Y = \{1, \dots 6\} \\ \text{range } X = \{0, \dots 6\} \end{cases}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{e=k}^{6} \mathbb{P}(X=k \mid Y=e)\, \mathbb{P}(Y=e)$$

$$= \sum_{e=k}^{6} \binom{e}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{e-k} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{e=k}^{6} \binom{e}{k} \frac{1}{2^e}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{6} k \cdot \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{6} \sum_{e=k}^{6} \frac{e!}{k!\,(e-k)!}\, k\, \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^e}$$

4. (a) Mostrare che, se X e Y sono due variabili aleatorie e X è costante, allora X e Y sono indipendenti.

(b) Siano X, Y variabili aleatorie tali che X^2 e Y^2 sono indipendenti. Possiamo concludere che anche X e Y sono indipendenti?

a) Da dimostrare

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y) \quad \forall x,y \in \overbrace{\mathrm{range}(X)}^{=\{c\}} \times \mathrm{range}(Y)$$

$$\mathbb{P}(X=c, Y=y) = \mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(X=c)\cdot\mathbb{P}(Y=y)$$

b) un controesempio

$\mathrm{range}(X) = \{-1, 1\}$

$\mathrm{range}(Y) = \{-1, 1\}$.

$$P_{XY}(1,1) = P_{XY}(-1,-1) = \frac{1}{2} \qquad P_{XY}(1,-1) = P_{XY}(-1,1) = 0$$

$$P_X(1)\cdot P_Y(-1) = \frac{1}{4}$$

$$P_{X^2,Y^2}(1,1) = 1 = P_{X^2}(1)\cdot P_{Y^2}(1)$$

Richiamo: • $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$

• Se X, Y sono indip. $\Longrightarrow \mathbb{E}[X\cdot Y] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$

5. Se le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3, X_4 rappresentano i lanci successivi di un dado, calcolare

$$E[(X_1+X_2)(X_3+X_4)]$$

$$\mathbb{E}\left[(X_1+X_2)(X_3+X_4)\right] = \mathbb{E}(X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4)$$

$$= \mathbb{E}(X_1X_3) + \mathbb{E}(X_1X_4) + \mathbb{E}(X_2X_3) + \mathbb{E}(X_2X_4)$$

$$= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_4) + \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(X_4)$$

$$= 4\cdot(3{,}5)^2 = 49$$

6. In un contenitore ci sono sei palline numerate da 1 a 6. Ne vengono estratte due senza reimmissione. Determinare legge congiunta, le leggi marginali e i corrispondenti valori di media e varianza delle seguenti variabili aleatorie:

(a) $X =$ "massimo tra i due valori ottenuti",
(b) $Y =$ "minimo tra i due valori ottenuti".

a) $X =$ massimo tra i due valori

$$P(X \le k) = F_X(k) = \frac{k\cdot(k-1)}{6\cdot 5}$$

$$P(X = k) = P(X \le k) - P(X \le k-1)$$

$$= \frac{k(k-1)}{6\cdot 5} - \frac{(k-1)(k-2)}{6\cdot 5}$$

$$= \frac{(k-1)}{6\cdot 5}\left(k-(k-2)\right) = \frac{2}{30}(k-1)$$

$$E(X) = \sum_{k=2}^{6} k\cdot P(X=k) = \frac{1}{15}\sum_{k=2}^{6} k\cdot(k-1).$$

b) Y minimo tra due valori

$$P(Y \le k) = 1 - P(Y > k) = 1 - \frac{(6-k)(6-k-1)}{6\cdot 5}$$

$$P(Y = k) = P(Y \le k) - P(Y < k) =$$

$$= \left(\cancel{1} - \frac{(6-k)(6-k-1)}{6\cdot 5}\right) - \left(\cancel{1} - \frac{(6-(k-1))(6-(k-1)-1)}{6\cdot 5}\right)$$

$$= \frac{(6-k+1)(6-k) - (6-k)(6-k-1)}{6\cdot 5} = \frac{(6-k)}{15}$$

7. Sia X una variabile aleatoria a valori reali con densità discreta

$$\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n} \qquad (n \geq 1)$$

(a) Determinare la probabilità dei seguenti eventi:

i. $X \geq 1$;
ii. $X \geq \frac{1}{10}$;
iii. $X \leq 0$;
iv. $0 \leq X < \frac{1}{2}$.

(b) Trovare $\mathbb{E}(X)$

Ripetere il punto (b) per la variabile aleatoria Y con densità discreta

$$\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \qquad (n \geq 1)$$

e

$$\mathbb{P}\left(X = n\right) = \frac{1}{2^n} \qquad (n \geq 2)$$

a) i) $\mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$

ii) $\mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{10}\right) = \sum_{n=1}^{10} \mathbb{P}\left(X = \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{2^n} - 1$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2\left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right) - 1$$

iii) $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$

iv) $\mathbb{P}\left(X \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}\left(X = \frac{1}{2}\right)$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

b) $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/2} q^{n-1}\, dq = \int_0^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}\, dq =$

$$= \int_0^{1/2} \frac{1}{1-q}\, dq = -\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \log(2)$$

c) $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\log(2) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\log(2) + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\log(2) + 4 - \frac{1}{2}\right)$$

8. (a) Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{N}$. Dimostrare l'uguaglianza

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k)\,.$$

(b) Ci sono b palline blu e r palline rosse in un contenitore. Le palline vengono estratte a caso una dietro l'altra fino a quando esce una pallina blu. Mostrare che il valore atteso del numero di estrazioni effettuate è $\frac{b+r+1}{b+1}$.

(c) Generalizziamo il punto (a): sia Y una variabile aleatoria discreta a valori reali positivi con range$(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$ (potenzialmente infinito contabile), e assumiamo che $x_1 < x_2 < \dots$. Assumiamo che $\mathbb{E}(X)$ esista, dimostrare l'uguaglianza

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^{\infty} (x_{j+1} - x_j)\mathbb{P}(X > x_j)$$

dove $x_0 := 0$.

a) $$X = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{1}_{k=X} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{k=X} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X=k}\,\mathbb{1}_{j\le k}$$

Fubini

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X=k}\,\mathbb{1}_{k\ge j} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X\ge j}$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X\ge j}\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X>\ell}\Big) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X>\ell}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P(X>\ell)$$

b) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X>k) = \sum_{k=0} \frac{r}{b+r}\,\frac{r-1}{b+r-1}\cdots\frac{r-k+1}{b+r-k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \frac{r!/(r-k)!}{(b+r)!/(b+r-k)!} = \frac{1}{\frac{(b+r)!}{r!\,b!}} \sum_{k=0}^{r} \frac{(b+r-k)!}{(r-k)!\,b!}$$

$$= \frac{1}{\binom{b+r}{r}} \sum_{k=0}^{r} \binom{b+r-k}{r-k} = \frac{1}{\binom{b+r}{r}} \sum_{j=0}^{r} \binom{b+j}{j} = \frac{1}{\binom{b+r}{r}} \binom{b+r+1}{r}$$

$$= \frac{(b+r+1)\cancel{!}\,/\,\cancel{r!}\,(b+1)\cancel{!}}{\cancel{(b+r)!}\,/\,\cancel{r!}\,\cancel{b!}} = \frac{b+r+1}{b+1}$$

c) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_0) \, \mathbb{P}(X = x_k)$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} (x_{j+1} - x_j) \, \mathbb{P}(X = x_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (x_{j+1} - x_j) \, \mathbb{P}(X = x_k) \, \mathbb{1}(j \leq k-1)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (x_{j+1} - x_j) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_k) \, \mathbb{1}(k \geq j+1)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (x_{j+1} - x_j) \, \mathbb{P}(X > x_j)$$

9. Sia p un numero primo, si ponga $\Omega = \{1, 2, \ldots, p\}$ e si consideri Ω come spazio di probabilità uniforme. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti definite su Ω. Dimostrare che almeno una delle due variabile aleatoria X, Y è costante. Questo risultato è vero se p non è primo? Fornire opportuni controesempi.

Siccome $(X,Y)(\omega)$ $\omega \in \Omega$ e $p(\omega) = \frac{1}{p}$ $\forall \omega$

$P_{XY}(x,y) = n_{xy} \cdot \frac{1}{p}$ per ogni coppia (x,y)
$n_{xy} \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow P_X(x) = \sum_{y \in \text{range}(Y)} P_{XY}(x,y) = \frac{n_x}{p}$, $P_Y(y) = \frac{n_y}{p}$

Se X e Y sono indip.

$$\boxed{\frac{n_{xy}}{p} = P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y) = \frac{n_x}{p} \cdot \frac{n_y}{p}}$$

$$\Longrightarrow n_{xy} = \frac{n_x \cdot n_y}{p} \quad \text{per} \quad 0 \leq n_x, n_y < p$$

$\not{y}$

Se p non è primo questo non vale

Esempio $p = 4$

$X = \{0,1\}$, $Y = \{0,1\}$ $\quad P_{XY}(x,y) = \frac{1}{4}$

$P_{XY}(x,y) = \frac{1}{4} = P_X(x) \cdot P_Y(y)$

10. (Opzionale) Sia $e(p) = \mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n))$, con $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti e con distribuzione di Bernoulli di parametro p, e $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ una funzione crescente nel senso seguente: vale $f(x) \le f(y)$ se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ soddisfano $x_k \le y_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Dimostrare che $e(p_1) \le e(p_2)$ per $p_1 \le p_2$.

$$\mathbb{E}_{p_1}(f(X_1,\dots,X_n)) - \mathbb{E}_{p_2}(f(X_1,\dots,X_n)) \le 0$$

$$\sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)\left(p_1^{\|x\|_1}(1-p_1)^{n-\|x\|_1}\right) - \sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)\left(p_2^{\|x\|_1}(1-p_2)^{n-\|x\|_1}\right) -$$

$$= \sum_{x\in\{0,1\}} f(x)\left(p_1^{\|x\|_1}(1-p_1)^{n-\|x\|_1} - p_2^{\|x\|_1}(1-p_2)^{n-\|x\|_1}\right)$$

$$= \sum_{d=0}^{n}\sum_{x:\|x\|_1=d} f(x)\left(p_1^{d}(1-p_1)^{n-d} - p_2^{d}(1-p_2)^{n-d}\right).$$

$$= \underbrace{\sum_{d=0}^{n}\left(p_1^{d}(1-p_1)^{n-d} - p_2^{d}(1-p_2)^{n-d}\right)\binom{n}{d}}\left[\underbrace{\frac{1}{\binom{n}{d}}\sum_{|x|=d} f(x)}_{\text{funzione crescente in } d} - c\right]$$

$d=0 \longrightarrow$ positiva

$d=n \longrightarrow$ negativa

$\Longrightarrow$ esiste d^*: $p_1^{d^*}(1-p_1)^{n-d^*} - p_2^{d^*}(1-p_2)^{n-d^*} \ge 0$

$p_1^{d^*+1}(1-p_1)^{n-d^*-1} - p_2^{d^*+1}(1-p_2)^{n-d^*-1} \le 0$

$\Longrightarrow$ scegliamo c tale che

$$\forall d: \; p_1^{d}(1-p_1)^{n-d} - p_2^{d}(1-p_2)^{n-d} \underset{\le}{\ge} 0$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{1}{\binom{n}{d}}\sum_{|x|=d} f(x) - c\right) \underset{\ge}{\le} 0$$

e l'inverso $\Longrightarrow$ Somma è negativa

Nota $c\sum_{j=0}^{n}\left(p_1^j(1-p_1)^{n-j}-p_2^j(1-p_2)^{n-j}\right)\binom{n}{j}$.

$$= c\left(\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p_1^j(1-p_1)^{n-j}}_{1}-\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p_2^j(1-p_2)^{n-j}}_{1}\right)$$

$$= 0$$

Foglio di esercizi 5

Discussione soluzioni: 04.04.2023

* Rappresenza gli esercizi prioritari

1. In un gioco, il concorrente gioca una somma iniziale $P > 0$. La probabilità di vittoria ad ogni turno è p e la somma giocata viene raddoppiata se vince, dimezzata se perde. Qual è la quantità attesa di denaro posseduta dal giocatore dopo l'n-esimo turno? Calcolarne il limite per $n \to \infty$.

2. * Siano X, Y e Z variabili aleatorie indipendenti tutte di legge di Poisson di parametro λ.
   (a) Qual è la legge condizionale di X dato $X + Y = n$? Si tratta di una legge nota? Quanto vale la media di questa legge condizionale?
   (b) Quanto vale la covarianza delle variabili aleatorie $X + Y$ e $X + Z$?
   (c) Quanto vale $P(X + Y = 2, X + Z = 3)$?

3. In un esperimento di Bernoulli con parametro p, siano T l'istante del primo successo e U l'istante del secondo successo.
   (a) Qual è la legge di distribuzione di U?
   (b) Dire se le variabili aleatorie T e U sono indipendenti.
   (c) Determinare la legge di distribuzione di T, sapendo che $U = n > 1$.

4. Un sacchetto contiene r gettoni rossi. Si inserisce nel sacchetto un gettone blu e poi si estrae (con reinserimento) un gettone. Si ripete questo procedimento (di inserire cioè un gettone blu e poi estrarre un gettone) fino a quando si estrae un gettone rosso. Detto N il numero di estrazioni fatte,
   (a) Mostrare che $P[N = \infty] = 0$;
   (b) Determinare la distribuzione di N ;
   (c) Calcolare media e varianza di N.

5. * Siano X e Y due variabili aleatorie reali. Definiamo la variabile aleatoria Z come X se esce testa al lancio di una moneta (indipendente da X e Y), e Y se invece esce croce. Determinare la covarianza tra X e Z in funzione del valore atteso e varianza di X e Y.

6. Sia $Z = \max\{X^2, Y^2\}$ con X, Y variabili aleatorie standardizzate[1] aventi covarianza ρ.
   (a) Si mostri che $E[Z] = 1$ nel caso particolare in cui $|\rho| = 1$.
   (b) Si mostri che in generale valgono le stime $1 \leq E[Z] \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2}$.
   Suggerimento: Usare che se $x, y > 0$, $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

7. * Sia dato un numero $n \geq 1$. Si lancia n volte un dado regolare e siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i risultati. Si dice che avviene un calo all'estrazione $k \geq 2$ se $X_k < X_{k-1}$. Sia D_n il numero di cali nei lanci effettuati.
   (a) Scrivere D_n come una somma di variabili aleatorie di Bernoulli (aka variabili indicatrici).
   (b) Calcolare il valore medio di ciascuna delle variabili di Bernoulli definite al punto precedenze e la covarianza di ogni coppia di tali variabili aleatorie.

[1] Una v.a. X si dice standardizzata se $E[X] = 0$ e $\mathrm{Var}(X) = 1$.

(c) Calcolare media e varianza di D_n usando i risultati dei punti precedenti.
(d) Calcolare la probabilità che non ci siano cali.

8. Un sacchetto contiene m gettoni, contrassegnati dai numeri da 1 a m, con $m \geq 3$. I gettoni sono estratti con la seguente modalità: ogni gettone estratto viene reinserito nel sacchetto dopo la successiva estrazione[2]. Per $n \geq 1$, sia S_n il numero di volte in cui il gettone m è estratto nelle prime n estrazioni.
   (a) Calcolare la media di S_n.
   (b) Determinare il limite in probabilità di $\frac{S_n}{n}$.

9. * Un dado viene lanciato n volte. Sia S_n il numero di volte, in n lanci, in cui si osserva che è uscito 6. Dimostrare che
   (a) $\lim_{n\to\infty} P[\frac{S_n}{n} > \frac{1}{3}] = 0$.
   (b) esiste una costante $C > 0$ tale che $P[\frac{S_n}{n} > \frac{1}{3}] \leq e^{-Cn}$.

10. Una moneta dà testa con probabilità p incognita. Per avere informazioni su p, la moneta viene tirata n volte e si osserva la percentuale di teste uscite su n lanci. Volendo approssimare p con tale percentuale,
    (a) quanto deve essere grande n affinché con probabilità maggiore di 0.99 l'errore commesso sia al più 0.1?
    (b) quanto deve essere grande n affinché con probabilità maggiore di 0.9 l'errore commesso sia al più 0.01?

11. * Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti di Poisson di parametro λ e poniamo $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.
    (a) Stimare con la disuguaglianza di Chebyshev ($\eta > 0$)
    $$\mathbb{P}[|\bar{X}_n - \lambda| \geq \eta]$$
    (b) Stimare la stessa quantità facendo un'approssimazione gaussiana. [3]
    (c) Confrontare le due stime per $\lambda = 1, \eta = 10^{-2}$ e $n = 10000$.

12. Siano $\{X_i\}_{i=1}^{100}$ variabili aleatorie mutualmente indipendenti e identicamente distribuite (IID) con distribuzione geometrica di parametro $p \in (0, 1)$.
    (a) Determinare per quali valori di p si possono definire il valore atteso e la varianza di $Z_1 := e^{X_1}$.
    (b) Approssimare tramite il teorema del limite centrale $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{100} e^{X_1} \leq 300)$ per $p = 0.9$.

13. * Sia X una variabile aleatoria con media nulla e momento quarto finito. Dimostrare che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $\epsilon > 0$ ed ogni intero positivo n
    $$P[|\bar{X}_n| \geq \epsilon] \leq \frac{C}{\epsilon^4 n^2}$$
    con $\bar{X}_n$ la media empirica di n copie indipendenti di X.

14. (Opzionale) Siano X, Y, Z variabili aleatorie discrete che assumono valori distinti con probabilità 1 e siano $a = P[X > Y]$, $b = P[Y > Z]$, $c = P[Z > X]$.
    (a) Dimostrare che $\min\{a, b, c\} \leq \frac{2}{3}$ e fornire un esempio in cui si ottiene l'uguaglianza $\min\{a, b, c\} = \frac{2}{3}$
    (b) Assumiamo che $P[X = 0] = 1$, che Y, Z siano indipendenti e tali che $P[Z = 1] = P[Y = -1] = p$ e $P[Z = -2] = P[Y = 2] = 1 - p$. Calcolare $\min\{a, b, c\}$ per $p \in [0, 1]$ fissato e calcolare $\sup_{p\in[0,1]} \min\{a, b, c\}$.

[2] Se ad esempio $m = 3$, e alla prima estrazione viene estratto, per dire, il gettone 1, allora alla seconda estrazione i gettoni nel sacchetto da cui si pesca sono 2 e 3. Se poi alla seconda estrazione viene estratto 2, i gettoni presenti nel sacchetto per la terza estrazione saranno 3 e 1 (estratto alla prima e reinserito nel sacchetto dopo la seconda estrazione).

[3] È sufficiente un argomento non rigoroso basato sul Teorema Limite Centrale.

1. In un gioco, il concorrente gioca una somma iniziale $P > 0$. La probabilità di vittoria ad ogni turno è p e la somma giocata viene raddoppiata se vince, dimezzata se perde. Qual è la quantità attesa di denaro posseduta dal giocatore dopo l'n-esimo turno? Calcolarne il limite per $n \to \infty$.

Y_n = somma al turno n $\qquad Y_0 = P$

Notiamo che possiamo scrivere

$Y_n = 2^{X_n - n}$ dove $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

→ conta # successi su n lanci

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} 2^{k-n} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= 2^{-n} (2p + 1 - p)^n = \left(\frac{1+p}{2}\right)^n$$

2. * Siano X, Y e Z variabili aleatorie indipendenti tutte di legge di Poisson di parametro λ.

(a) Qual è la legge condizionale di X dato $X + Y = n$? Si tratta di una legge nota? Quanto vale la media di questa legge condizionale?

(b) Quanto vale la covarianza delle variabili aleatorie $X + Y$ e $X + Z$?

(c) Quanto vale $P(X + Y = 2, X + Z = 3)$?

a) $$\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k,\ X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=k,\ Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathbb{P}(X=k)\cdot\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda}}\,\frac{\cancel{\lambda^{k}}}{k!}\cdot\cancel{e^{-\lambda}}\,\frac{\lambda^{n-\cancel{k}}}{(n-k)!}}{\cancel{e^{-2\lambda}}\,\frac{(2\lambda)^n}{n!}} = \frac{1}{2^n}\cdot\binom{n}{k}$$

b) $$\mathrm{Cov}(X+Y,\ X+Z) = \mathrm{Cov}(X,\ X+Z) + \mathrm{Cov}(Y,\ X+Z)$$

$$= \mathrm{Cov}(X,X) + \cancel{\mathrm{Cov}(X,Z)} + \cancel{\mathrm{Cov}(Y,X)} + \cancel{\mathrm{Cov}(Y,Z)}$$

$X \perp\!\!\!\perp Y$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ $= \mathrm{Var}(X) = \lambda$

c) $$\mathbb{P}(X+Y=2,\ X+Z=3) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X+Y=2, X+Z=3 \mid X=k)\,\mathbb{P}(X=k)$$

$$= \dots = e^{-3\lambda}\left(\frac{1}{12}\lambda^5 + \frac{1}{2}\lambda^4 + \frac{1}{2}\lambda^3\right)$$

indipendenza X, Y, Z

4. Un sacchetto contiene r gettoni rossi. Si inserisce nel sacchetto un gettone blu e poi si estrae (con reinserimento) un gettone. Si ripete questo procedimento (di inserire cioè un gettone blu e poi estrarre un gettone) fino a quando si estrae un gettone rosso. Detto N il numero di estrazioni fatte,

   (a) Mostrare che $P[N = \infty] = 0$;

   (b) Determinare la distribuzione di N ;

   (c) Calcolare media e varianza di N.

a) $\mathbb{P}(N=1) = \dfrac{1}{r+1}$

$$P(N=2) = \left(1 - \frac{1}{r+1}\right)\frac{2}{r+2}$$

$\vdots$

$$\mathbb{P}(N=n) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r+i}\right)\cdot\frac{n}{r+n} = \prod_{i=1}^{n-1}\frac{r}{r+i}\cdot\frac{n}{r+n} \qquad (*)$$

In particolare

$$\mathbb{P}(N=n) \le \left(\frac{r}{r+1}\right)^{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

b) vedi $(*)$

$$c)\ \mathbb{E}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{n}{r+n}\prod_{\ell=1}^{n-1}\frac{r}{r+\ell} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{n}{r+n}\,\frac{r^{n-1}}{\frac{(r+n-1)!}{r!}}$$

$$= r!\,\frac{1}{r^{r+1}}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,\frac{r^{n+r}}{(r+n)!}$$

3. In un esperimento di Bernoulli con parametro p, siano T l'istante del primo successo e U l'istante del secondo successo.

   (a) Qual è la legge di distribuzione di U?
   (b) Dire se le variabili aleatorie T e U sono indipendenti.
   (c) Determinare la legge di distribuzione di T, sapendo che $U = n > 1$.

a) $U \sim \text{NegBin}(2, p)$

$$P(U = k) = \binom{k-1}{1} \cdot p^2 (1-p)^{k-2}$$

b) Non sono indipendenti:

$$\mathbb{P}(T = 2, U = 2) = 0 \neq p^2 \cdot p \cdot (1-p) = \mathbb{P}(U=2)\,\mathbb{P}(T=1)$$

c) Chiaramente se sappiamo che $U = n$ $\text{range}(T) = \{1, \dots, n-1\}$

$$\mathbb{P}(T = k \mid U = n) = \frac{\mathbb{P}(T = k, U = n)}{\mathbb{P}(U = n)} =$$

$$= \frac{(1-p)^{k-1} \cdot p \cdot (1-p)^{n-(k-1)-2}\, p}{(n-1) \cdot p^2 (1-p)^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{n-1} \qquad \text{per } k \in \{1, \dots, n-1\}$$

$\Longrightarrow$ distribuzione uniforme.

5. * Siano X e Y due variabili aleatorie reali. Definiamo la variabile aleatoria Z come X se esce testa al lancio di una moneta (indipendente da X e Y), e Y se invece esce croce. Determinare la covarianza tra X e Z in funzione del valore atteso e varianza di X e Y.

$$Z = I \cdot X + (1-I)Y \qquad \text{dove} \qquad \underbrace{I \in \{0,1\}}_{\to \text{ lancio moneta.}}$$

Usando la bilinearità della covarianza

$$\mathrm{Cov}(X,Z) = \mathrm{Cov}(X, IX + (1-I)Y) =$$

$$= \mathrm{Cov}(X, IX) + \mathrm{Cov}(X,(1-I)Y)$$

$$\overset{*+**}{=} \frac{1}{2}\left(\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Cov}(X,Y)\right)$$

$$\mathrm{Cov}(X, IX) = \mathbb{E}(X^2 I) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(IX) =$$

$$= \left(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\right)\mathbb{E}(I) = \frac{1}{2}\mathrm{Var}(X) \qquad *$$

$$\mathrm{Cov}(X,(1-I)Y) = \mathbb{E}(XY(1-I)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}((1-I)Y)$$

$$= \mathbb{E}(1-I)\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y) \qquad **$$

6. Sia $Z = \max\{X^2, Y^2\}$ con X, Y variabili aleatorie standardizzate[1] aventi covarianza ρ.

(a) Si mostri che $E[Z] = 1$ nel caso particolare in cui $|\rho| = 1$.

(b) Si mostri che in generale valgono le stime $1 \le E[Z] \le 1 + \sqrt{1-\rho^2}$.
Suggerimento: Usare che se $x, y > 0$, $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

a) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{SD(X)\,SD(Y)}$

Fatto: $\mathrm{Cov}(X,Y) \in [-1,1]$

$|\mathrm{Cov}(X,Y)| = 1 \Rightarrow X = \alpha \cdot Y$

$SD(X) = SD(Y) = 1$

$\Rightarrow |\rho| = |\mathrm{Cov}(X,Y)| = 1 \Rightarrow X = \alpha Y$

$1 \overset{!}{=} SD(Y) = SD(\alpha X) = |\alpha|\, SD(X) = |\alpha| 1$

$\Rightarrow \max(X^2, Y^2) = \max(X^2, \alpha^2 X^2) = X^2$

$\Rightarrow E(Z) = E(X^2) = E(X^2) - E(X)^2 = \mathrm{Var}(X) = 1$

b) • $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ • $E(X^2) = E(Y^2) = 1$

$E(Z) = E\left(\dfrac{X^2+Y^2+|X^2-Y^2|}{2}\right) = 1 + E\left(\dfrac{|X^2-Y^2|}{2}\right)$

$= 1 + \frac{1}{2} E\left[|(X-Y)(X+Y)|\right] \overset{C.S}{\le} 1 + \frac{1}{2}\sqrt{E((X-Y)^2)} \cdot \sqrt{E((X+Y)^2)}$

$= 1 + \sqrt{\dfrac{E(X^2)+E(Y^2)-2(E(XY)-E(X)E(Y))}{2}} \sqrt{\dfrac{2+2\mathrm{Cov}(X,Y)}{2}}$

ρ

$= 1 + \sqrt{1-\rho} \cdot \sqrt{1+\rho} = 1 + \sqrt{1-\rho^2}$

8. Un sacchetto contiene m gettoni, contrassegnati dai numeri da 1 a m, con $m \geq 3$. I gettoni sono estratti con la seguente modalità: ogni gettone estratto viene reinserito nel sacchetto dopo la successiva estrazione[2]. Per $n \geq 1$, sia S_n il numero di volte in cui il gettone m è estratto nelle prime n estrazioni.

(a) Calcolare la media di S_n.

(b) Determinare il limite in probabilità di $\frac{S_n}{n}$.

$$\mathbb{1}_j = \begin{cases} 1 & \text{se il gettone } m \text{ è estratto alla } j\text{-esima estr.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{1}_j = 1)$

$\mathbb{P}(\mathbb{1}_1 = 1) = \frac{1}{m}$

$\mathbb{P}(\mathbb{1}_2 = 1) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_2 = 1, \mathbb{1}_1 = 0) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_2 = 1 \mid \mathbb{1}_0 = 0)\,\mathbb{P}(\mathbb{1}_0 = 0)$

$= \frac{1}{m-1} \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m}$

$\vdots$

$\mathbb{P}(\mathbb{1}_j = 1) = \frac{1}{m}$

$= n \cdot \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$

b) <u>Claim</u>: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{m}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$

<u>Proof</u>: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{m}\right| > \varepsilon\right) \overset{(C)}{\leq} \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \leq \frac{C^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

7. * Sia dato un numero $n \geq 1$. Si lancia n volte un dado regolare e siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i risultati. Si dice che avviene un calo all'estrazione $k \geq 2$ se $X_k < X_{k-1}$. Sia D_n il numero di cali nei lanci effettuati.

(a) Scrivere D_n come una somma di variabili aleatorie di Bernoulli (aka variabili indicatrici).

(b) Calcolare il valore medio di ciascuna delle variabili di Bernoulli definite al punto precedenze e la covarianza di ogni coppia di tali variabili aleatorie.

(c) Calcolare media e varianza di D_n usando i risultati dei punti precedenti.

(d) Calcolare la probabilità che non ci siano cali.

a) $A_j = \{\text{calo al lancio } j\}$ $\quad \mathbb{1}_{A_j} = \begin{cases} 1 & \text{se calo al lancio } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$D_n = \sum_{j=2}^{n} \mathbb{1}_{A_j}$$

b) $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_j})$ $\quad \mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(A_2) = \dfrac{6 \cdot 5/2}{36} = \dfrac{5}{12}$

$$Var(\mathbb{1}_{A_j}) = p(1-p) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} \qquad \text{dove } p = \mathbb{P}(A_2)$$

<u>Claim</u>: $A_j \perp\!\!\!\perp A_k$ se $|j-k| > 1$

$$\begin{aligned} Cov(\mathbb{1}_{A_2}, \mathbb{1}_{A_3}) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2} \cdot \mathbb{1}_{A_3}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2})\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_3}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2 \cap A_3}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2}) \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_3}) \\ &= \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) \\ &= \frac{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6}}{3} - \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} \approx -0.08 \end{aligned}$$

c) $\mathbb{E}(D_n) = \sum_{j=2}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_j}) = \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(A_j) = (n-1)\,\mathbb{P}(A_2)$

$$= (n-1) \cdot \frac{\frac{6 \cdot 5}{2}}{36} = (n-1)\frac{5}{12}$$

$$Var(D_n) = \sum_{j,k=2}^{n} Cov(\mathbb{1}_{A_j}, \mathbb{1}_{A_k})$$

$$= \underbrace{\sum_{j=2}^{n} Cov(\mathbb{1}_{A_j}, \mathbb{1}_{A_j})}_{Var(\mathbb{1}_{A_j})} + 2\sum_{j=2}^{n-1} Cov(\mathbb{1}_{A_j}, \mathbb{1}_{A_{j+1}})$$

$$= (n-1)\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12} - 2(n-2)\,0.08$$

d) L'esperimento consiste in n prove indipendenti ciascuna con esito in $\Omega_0 = \{1,2,3,4,5,6\}$.

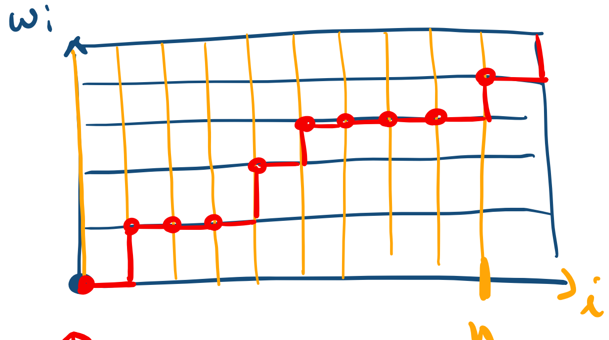
→ La distribuzione sullo spazio degli esiti è uniforme

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{6^n} \qquad \omega \in \Omega_n = \{1,2,\dots,6\}^n$$

Definiamo $A_n = \{\omega : \omega_i \le \omega_{i+1},\ i \in \{1,\dots,n-1\}\}$

$$\mathbb{P}(D_n = 0) = \sum_{\omega \in A_n} \frac{1}{6^n} = |A_n|\,\frac{1}{6^n} = \binom{6+n+1}{6}\cdot\frac{1}{6^n}$$

Calcoliamo $|A_n|$ rappresentando ogni esito ω come un cammino sulla griglia di larghezza $6\times(n+1)$. Allora



$(1,2,2,2,3,4,4,4,4,5)$

$|A_n| = $ (# cammini senza cali)

$=$ (# modi di scegliere dove aument.)

$=$ (# scelte di 6 aumenti in $(6+n+1)$ spazi)

$$= \binom{6+n+1}{6}$$

9. * Un dado viene lanciato n volte. Sia S_n il numero di volte, in n lanci, in cui si osserva che è uscito 6. Dimostrare che

(a) $\lim_{n\to\infty} P[\frac{S_n}{n} > \frac{1}{3}] = 0$.

(b) esiste una costante $C > 0$ tale che $P[\frac{S_n}{n} > \frac{1}{3}] \le e^{-Cn}$.

a) $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\frac{1}{6}\cdot n}{n} = \frac{1}{6} \qquad \sigma_n = SD\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sqrt{5}$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{1}{3}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{6} > \frac{1}{6}\right) \le \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{6}\right| > \frac{1}{6}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{6}\right|}{\sigma_n} \ge \frac{1}{6\sigma_n}\right) \le (6\sigma_n)^2 = \frac{5}{n} \quad \boxed{\xrightarrow[n\to\infty]{LLN} 0}$$

b) $$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{1}{3}\right) = \mathbb{P}\left(\alpha S_n > \frac{\alpha n}{3}\right) = \mathbb{P}\left(e^{\alpha S_n} > e^{\alpha n/3}\right)$$

$$\overset{M}{\le} \frac{\mathbb{E}(e^{\alpha S_n})}{e^{n/3}} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} (1-p)^{n-k}(pe^{\alpha})^{k}}{e^{n/3}}$$

$$= \frac{(1-p+pe^{\alpha})^n}{e^{\alpha n/3}} = e^{\left(-\underbrace{\frac{\alpha}{3}}_{0.3} + \underbrace{\log(1-p+pe^{\alpha})}_{0.1}\right)n}$$

10. Una moneta dà testa con probabilità p incognita. Per avere informazioni su p, la moneta viene tirata n volte e si osserva la percentuale di teste uscite su n lanci. Volendo approssimare p con tale percentuale,

(a) quanto deve essere grande n affinché con probabilità maggiore di 0.99 l'errore commesso sia al più 0.1?

(b) quanto deve essere grande n affinché con probabilità maggiore di 0.9 l'errore commesso sia al più 0.01?

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{se testa al } j\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \mathbb{P}(I_j = 1) = p$$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_j \implies$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \cdot np = p \\ \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_j\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \, \mathrm{Var}(I_j) = \underbrace{\frac{1}{n} p(1-p)}_{\sigma^2} \end{cases}$$

Chebyshev inequality

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2}$$

a) $\varepsilon = 0.1$, $\quad \frac{\sigma_n^2}{0.01} \leq 0.01 \iff \frac{p(1-p)}{n} \leq 10^{-4}$

$\iff n \geq 10^4 p(1-p)$

b) $\varepsilon = 0.01$, $\quad \frac{\sigma_n^2}{10^{-4}} \leq 0.1 \iff \frac{p(1-p)}{n} \leq 10^{-5}$

$\iff n \geq 10^5 p(1-p)$

11. * Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti di Poisson di parametro λ e poniamo $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

(a) Stimare con la disuguaglianza di Chebyshev ($\eta > 0$)

$$\mathbb{P}[|\bar{X}_n - \lambda| \geq \eta]$$

(b) Stimare la stessa quantità facendo un'approssimazione gaussiana. [3]

(c) Confrontare le due stime per $\lambda = 1, \eta = 10^{-2}$ e $n = 10000$.

a) $\bar{X}_n$

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{\lambda} = \lambda$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n}\lambda$$

$\mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \lambda| \geq \eta) = \mathbb{P}\left(\frac{|\bar{X}_n - \lambda|}{\sqrt{\lambda/n}} \geq \underbrace{\frac{\eta}{\sqrt{\lambda/n}}}_{k}\right) \overset{C}{\leq} \frac{1}{k^2} = \frac{\lambda}{\eta^2 n} = 1$$

$\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)}$ $\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)}$

c) $\dfrac{\lambda}{\eta^2 n} = \dfrac{1}{10^{-4}\cdot 10^{4}} = 1$

b)
$$\mathbb{P}\left(\frac{|\bar{X}_n - \lambda|}{\sqrt{\lambda/n}} \geq \frac{\eta}{\sqrt{\lambda/n}}\right) \overset{CLT}{\simeq} 2\int_{\eta/\sqrt{\lambda/n}}^{\infty} \phi(x)\,dx = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\eta}{\sqrt{\lambda/n}}\right)\right)$$

$$= 2\,\Phi\left(-\frac{\eta}{\sqrt{\lambda/n}}\right) = 2\,\Phi\left(-\sqrt{\frac{\eta^2 n}{\lambda}}\right)$$

c) $= 2\,\Phi(-1) = 2\cdot 0.15 = 0.3$

Richiamo: $X \sim \text{Geom}(p)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dq} q^k \Big|_{q=1-p} = p \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

$$= p \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} \Big|_{q=1-p} = p \frac{1}{(1-q)^2} \Big|_{q=1-p} = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} p - \sum_{k=0}^{\infty} k (1-p)^{k-1} p$$

$$= p \left(\frac{d^2}{dq^2} \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) = p \left(\frac{d}{dq} \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{(1-q)^2} \right)$$

$$= p \left(+ \frac{1}{(1-q)^{\cancel{4}\, 3}} \cdot 2\cancel{(1-q)} - \frac{1}{(1-q)^2} \right) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$\Longrightarrow \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

12. Siano $\{X_i\}_{i=1}^{100}$ variabili aleatorie mutualmente indipendenti e identicamente distribuite (IID) con distribuzione geometrica di parametro $p \in (0, 1)$.

(a) Determinare per quali valori di p si possono definire il valore atteso e la varianza di $Z_1 := e^{X_1}$.

(b) Approssimare tramite il teorema del limite centrale $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{100} e^{X_i} \leq 300)$ per $p = 0.9$.

a) $$\mathbb{E}(e^{X_1}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^k (1-p)^{k-1} \cdot p = p \cdot e \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [e(1-p)]^{k-1} =$$

$$= p \cdot e \cdot \sum_{k=0}^{\infty} [e(1-p)]^k = \frac{p \cdot e}{1 - e(1-p)}$$ se $e \cdot (1-p) < 1$

$\Longleftrightarrow p > \frac{e-1}{e}$

$$\text{Var}(e^{X_1}) = \mathbb{E}(e^{2X_1}) - \mathbb{E}(e^{X_1})^2$$

$$\mathbb{E}(e^{2X_1}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{2k} (1-p)^{1-k} p = p e^2 \sum_{k=1}^{\infty} [e^2(1-p)]^{k-1} = p e^2 \frac{1}{1 - e^2(1-p)}$$

se $e^2(1-p) < 1 \Longleftrightarrow p > \frac{e^2-1}{e^2} > \frac{e-1}{e}$

b) $p = 0.9 > \frac{e^2 - 1}{e^2} \implies \mathbb{E}(e^{X_i}), \mathrm{Var}(e^{X_i})$ exist.

$$\mu = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{100} e^{X_i}\right) = 100\, \mathbb{E}\left(e^{X_1}\right) = \frac{100 \cdot p \cdot e}{1 - e(1-p)} = 335{,}97$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{100} e^{X_i}\right) = 100\, \mathrm{Var}\left(e^{X_1}\right) = \frac{100\, pe^2}{1 - e^2(1-p)} - 100\left(\frac{pe}{1 - e(1-p)}\right)^2$$

$$= 1418.25$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{100} e^{X_i}\right)} = 37.66$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} e^{X_i} < 300\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} e^{X_i} - \mu}{\sigma} < -\frac{35.97}{37.66}\right)$$

$$\overset{CLT}{\approx} \Phi(-0.955)$$

$$\approx 0.171$$

13. * Sia X una variabile aleatoria con media nulla e momento quarto finito. Dimostrare che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $\epsilon > 0$ ed ogni intero positivo n

$$P[|\bar{X}_n| \geq \epsilon] \leq \frac{C}{\epsilon^4 n^2}$$

con $\bar{X}_n$ la media empirica di n copie indipendenti di X.

$$\mu = 0 \qquad \sigma = \sqrt{\operatorname{Var} X} \implies \sigma_n = \sqrt{\operatorname{Var} \bar{X}_n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma$$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{X}_n}{\sigma_n}\right| \geq \frac{\varepsilon}{\sigma_n}\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{X}_n}{\sigma_n}\right|^4 \geq \frac{\varepsilon^4}{\sigma_n^4}\right)$$

$$Y_n = \left(\frac{\bar{X}_n}{\sigma_n}\right)^4 \qquad = \mathbb{P}\left(Y_n \geq \frac{\varepsilon^4}{\sigma_n^4}\right) \overset{M}{\leq} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{\varepsilon^4 / \frac{\sigma^4}{n^2}} = \frac{\mathbb{E}(Y_n)\sigma^4}{n^2 \varepsilon^4}$$

Dobbiamo dimostrare $\mathbb{E}(Y_n) < \infty$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{\sigma_n^4} \cdot \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right)^4\right) = \frac{n^2}{\sigma^4} \cdot \frac{1}{n^4} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^4\right)$$

$$= \frac{1}{n^2\sigma^4} \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{i,j,k,e=1}^n X_i X_j X_k X_e\right)$$

$$= \frac{1}{n^2\sigma^4} \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n X_j^4 + \sum_{j,e=1}^n X_j^2 X_e^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2\sigma^4}\left(n\,\mathbb{E}(X^4) + n^2\,\mathbb{E}(X^2)\right)$$

$$\leq \frac{1}{\cancel{n^2}\sigma^4}\left(\cancel{n^2}\,\mathbb{E}(X^4) + \cancel{n^2}\,\mathbb{E}(X^2)\right) = \frac{C}{\sigma^4}$$

14. (Opzionale) Siano X, Y, Z variabili aleatorie discrete che assumono valori distinti con probabilità 1 e siano $a = P[X > Y]$, $b = P[Y > Z]$, $c = P[Z > X]$.

   (a) Dimostrare che $\min\{a, b, c\} \leq \frac{2}{3}$ e fornire un esempio in cui si ottiene l'uguaglianza $\min\{a, b, c\} = \frac{2}{3}$

   (b) Assumiamo che $P[X = 0] = 1$, che Y, Z siano indipendenti e tali che $P[Z = 1] = P[Y = -1] = p$ e $P[Z = -2] = P[Y = 2] = 1 - p$. Calcolare $\min\{a, b, c\}$ per $p \in [0, 1]$ fissato e calcolare $\sup_{p \in [0,1]} \min\{a, b, c\}$.

Foglio di esercizi 6

Discussione soluzioni: 18.04.2023

1. Un esperimento consiste nel ripetere 60 volte l'estrazione (con reinserimento) di una biglia da un'urna contenente 50 biglie, 15 delle quali sono bianche.
   (a) Calcolare approssimativamente, usando il teorema del limite centrale (TLC), la probabilità che il numero di biglie bianche estratte sia maggiore di 10 e minore o uguale di 30.
   (b) Supponendo ora che il numero totale di palline nel contenitore sia 500 (sempre con 15 biglie bianche), si calcoli approssimativamente la probabilità che il numero di biglie bianche estratte sia minore o uguale a 2 usando un'approssimazione più appropriata di quella data dal TLC.
2. Sia $X \sim \text{NegBin}(100, 1/3)$.
   (a) Maggiorare $P(X > 500)$ usando la disuguaglianza di Markov.
   (b) Maggiorare $P(X > 500)$ usando la disuguaglianza di Chebyshev.
   (c) Ricordiamo che X può essere scritta come la somma di 100 variabili aleatorie IID rcon distribuzione $\text{Geom}(1/3)$. Usando questa rappresentazione ed il TLC, trovare un valore approssimativo per $P(X > 500)$.
3. Se non ancora fatto, svolgere l'esercizio 12 del foglio precedente.

Proprietà utili della funzione cumulativa Φ di una normale standard

- Valore limite: $\Phi(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$
- Simmetria: $\Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx - \int_{a}^{\infty} \phi(x)dx = 1 - \int_{-\infty}^{-a} \phi(x)dx = 1 - \Phi(-a)$
- Valori tabellati di $\Phi(a)$ per l'intervallo $a \in [0, \infty)$ (per $a \in (-\infty, 0)$ usare simmetria):

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

Thm (CLT) $\{X_1 \dots X_n\}$ sequenze di VA iid $\begin{cases} \mathbb{E}(X_i) = \mu \in \mathbb{R} \\ Var(X_i) = \sigma^2 < \infty \end{cases}$

definiamo $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Def: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ significa

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} < z \right) \xrightarrow{n \to \infty} \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$= \Phi(z)$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(a \leq \overline{X}_n \leq b) = \mathbb{P}\left(\alpha_n \leq \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \beta_n \right)$$

$$\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \\ \\ \beta_n = \dfrac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \end{cases} \qquad = \Phi(\beta_n) - \Phi(\alpha_n)$$

1. Un esperimento consiste nel ripetere 60 volte l'estrazione (con reinserimento) di una biglia da un'urna contenente 50 biglie, 15 delle quali sono bianche.
   (a) Calcolare approssimativamente, usando il teorema del limite centrale (TLC), la probabilità che il numero di biglie bianche estratte sia maggiore di 10 e minore o uguale di 30.
   (b) Supponendo ora che il numero totale di palline nel contenitore sia 500 (sempre con 15 biglie bianche), si calcoli approssimativamente la probabilità che il numero di biglie bianche estratte sia minore o uguale a 2 usando un'approssimazione più appropriata di quella data dal TLC.

a) $p = \mathbb{P}(\text{pescare biglia bianca}) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0.3$

$n = 60$

$S_n = \#\text{ biglie bianche estratte} \sim Bin(n, p)$

$\mathbb{E}(S_n) = n \cdot p = 60 \cdot 0.3 = 18$

$Var(S_n) = n \cdot p \cdot (1-p) = 18 \cdot 0.7 = 12{,}2$

$\Rightarrow SD(S_n) = \sqrt{Var(S_n)} \simeq 3.5$

$$\mathbb{P}(10 \leq S_n \leq 30) = \mathbb{P}\left(\frac{10-18}{3.5} \leq \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{SD(S_n)} \leq \frac{30-18}{3.5}\right)$$

$$\simeq \mathbb{P}(-2.3 \leq Z \leq 3.5) = \Phi(3.5) - \Phi(-2.3)$$

$$= \Phi(3.5) - (1 - \Phi(2.3)) \approx \Phi(2{,}3) \approx 0.9893$$

b) Siccome $p = \frac{15}{500} = 0.03 \ll 1$ meglio usare Poisson.

con $\mu = n \cdot p = 1.8$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_n \leq 2) \approx e^{-\mu}\frac{\mu^0}{0!} + e^{-\mu}\frac{\mu^1}{1!} + e^{-\mu}\frac{\mu^2}{2!}$$

$$\simeq 0.73.$$

2. Sia $X \sim \mathrm{NegBin}(100, 1/3)$.

   (a) Maggiorare $P(X > 500)$ usando la disuguaglianza di Markov.

   (b) Maggiorare $P(X > 500)$ usando la disuguaglianza di Chebyshev.

   (c) Ricordiamo che X può essere scritta come la somma di 100 variabili aleatorie IID rcon distribuzione $\mathrm{Geom}(1/3)$. Usando questa rappresentazione ed il TLC, trovare un valore approssimativo per $P(X > 500)$.

a) $$\mathbb{P}(X > 500) \overset{M}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X)}{500} = \frac{100 \cdot \frac{1}{1/3}}{500} \leq \frac{3}{5}$$

b) $$\mathbb{P}(X > 500) \leq \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \leq 500 - 300)$$

$$\mathrm{Var}(X) = 100 \frac{2/3}{(1/3)^2} = 600$$

$$\leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \leq 200) \leq \frac{SD(X)^2}{200^2} = \frac{3}{2} 10^{-2}$$

c) $$X = S_n = \sum_{i=1}^{100} T_i \qquad T_i \overset{iid}{\sim} \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbb{P}(X > 500) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{SD(S_n)} \leq \frac{500 - \mathbb{E}(S_n)}{SD(S_n)}\right)$$

$$\approx \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{20}{\sqrt{6}}\right) \approx \Phi(8.16) \approx 1$$

3. Se non ancora fatto, svolgere l'esercizio 12 del foglio precedente.

a) $$\mathbb{E}(e^{X_1}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^k (1-p)^{k-1} \cdot p = p \cdot e \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [e(1-p)]^{k-1} =$$

$$= p \cdot e \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} [e(1-p)]^{\ell} = \frac{p \cdot e}{1 - e(1-p)} \quad \text{se} \quad e \cdot (1-p) < 1$$

$$\Longleftrightarrow p > \frac{e-1}{e}$$

$$\mathrm{Var}(e^{X_1}) = \mathbb{E}(e^{2X_1}) - \mathbb{E}(e^{X_1})^2$$

$$\mathbb{E}(e^{2X_1}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{2k} (1-p)^{1-k} p = pe^2 \sum_{k=1}^{\infty} [e^2(1-p)]^{k-1} = pe^2 \frac{1}{1-e^2(1-p)}$$

$$\text{se} \quad e^2(1-p) < 1 \Longleftrightarrow p > \frac{e^2-1}{e^2} > \frac{e-1}{e}$$

b) $$p = 0.9 > \frac{e^2-1}{e^2} \Longrightarrow \mathbb{E}(e^{X_i}), \mathrm{Var}(e^{X_i}) \text{ exist.}$$

$$\mu = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{100} e^{X_i}\right) = 100\, \mathbb{E}(e^{X_1}) = \frac{100 \cdot p \cdot e}{1 - e(1-p)} = 335{,}97$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{100} e^{X_i}\right) = 100\, \mathrm{Var}(e^{X_1}) = \frac{100\, pe^2}{1-e^2(1-p)} - 100\left(\frac{pe}{1-e(1-p)}\right)^2$$

$$= 1418.25$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{100} e^{X_i}\right)} = 37.66$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} e^{X_i} < 300\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} e^{X_i} - \mu}{\sigma} < -\frac{35.97}{37.66}\right)$$

$$\overset{CLT}{\approx} \Phi(-0.955)$$

$$\approx 0.171$$

Revisione generale:

Spazi di probabilità: $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$

$\Omega \to$ spazio degli esiti

$\Sigma \to$ σ-algebra

$\mathbb{P} \to$ misura di probabilità

Assiomi di probabilità:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \forall A \in \Sigma$
- $\mathbb{P}(\bigcup_j A_j) = \sum \mathbb{P}(A_j) \quad \forall A_1, A_2, \dots \quad A_i \cap A_j = \phi$

$\Rightarrow$ Probabilità uniforme: $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad A \in \Sigma$

$\Rightarrow$ Combinatoria:

$\Omega = \{1, \dots, n\}$

- Permutazioni: $|\{(\omega_1 \dots \omega_n) \in \Omega^n : \omega_i \neq \omega_j\}| = n!$
- Disposizioni 1: $|\{(\omega_1, \dots, \omega_k) \in \Omega^k\}| = n^k$
- Disposizioni 2: $|\{(\omega_1, \dots, \omega_k) \in \Omega^k : \omega_i \neq \omega_j\}| = \frac{n!}{(n-k)!}$
- Combinazioni $|\{\{\omega_1, \dots, \omega_k\} \in \Omega^k : \omega_i \neq \omega_j\}| = \binom{n}{k}$

Probabilità condizionale: $\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ se $\mathbb{P}(B) > 0$

Teorema di Bayes: $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$

Disintegrazione: $\mathbb{P}(A) = \sum \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$ se $\{B_i\}$ partizione di A.

Indipendenza: $\{A_1, A_2, \dots\}$ indip. se $\forall J \subset \{1, 2, \dots\}$ finito

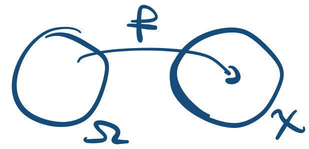
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Variabili aleatorie

Def: Una variabile aleatoria è una funzione (misurabile) $X : \Omega \to \mathcal{X}$

Scriviamo il suo insieme delle immagini

$\text{range}(X)$



Def: La densità discreta (o fdm) di una variabile aleatoria è una funzione $p_X : \text{range}(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \qquad \forall x \in \text{range}(X)$$

Rem: Dalla fdm possiamo ricavare la distribuzione di X:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x \in B} p_X(x)$$

Def: Valore atteso $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{range}(X)} x\, p_X(x)$ se $\sum |x|\, p_X(x) < \infty$

Varianza $\text{Var}(X) = \sum_{x \in \text{ran}(X)} (x - \mathbb{E}(X))^2 p_X(x) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geq 0$

↳ se esiste.

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Covarianza $\text{Cov}(X,Y) = \sum_{\substack{x \in \text{ran}(X) \\ y \in \text{ran}(Y)}} (x - \mathbb{E}(X))(y - \mathbb{E}(Y)) =$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Proprietà:
- (linearità) $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$
- (linearità') $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$
- se $X \perp\!\!\!\perp Y$: $\mathbb{E}(X\cdot Y) = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$
- se $X \perp\!\!\!\perp Y$: $Cov(X,Y) = 0$
- $Cov(aX+Z,Y) = a\,Cov(X,Y) + Cov(Z,Y)$
- se $X \perp\!\!\!\perp Y$: $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$

Esempi notevoli:

- <u>Variabili di Bernoulli</u>: $I \sim Ber(p)$ $p \in (0,1)$ se

  $range(I) = \{0,1\}$, $\mathbb{P}(I=1) = p$, $\mathbb{P}(I=0) = 1-p$

  $\mathbb{E}(I) = \mathbb{P}(I=1) = p$ $\qquad Var(I) = p(1-p)$

- <u>Variabili Binomiali</u>: $X \sim Bin(n,p)$ $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

  $X = \sum_{j=1}^{n} I_j$ $\qquad I_j \overset{iid}{\sim} Ber(p)$ $\qquad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

  $\mathbb{E}(X) = n\cdot p$ $\qquad Var(X) = np(1-p)$

- Variabili Geometriche $T \sim Geom(p)$ $p \in (0,1)$

$$\mathbb{P}(T=k) = p(1-p)^{k-1}$$

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p} \qquad Var(T) = \frac{1-p}{p^2}$$

- Variabili negative binomiali $S \sim NegBin(m,p)$

$$\mathbb{P}(S=k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} \qquad S = \sum_{i=1}^{m} T_i$$

$$T_i \overset{iid}{\sim} Geom(p)$$

$$\mathbb{E}(S) = \frac{m}{p} \qquad Var(S) = m\,\frac{1-p}{p^2}$$

- Variabili di Poisson $X \sim Pois(\lambda)$ $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad , \quad Var(X) = \lambda$$

$$X \sim Pois(\lambda_1),\ Y \sim Pois(\lambda_2)\quad X \perp\!\!\!\perp Y \implies X+Y \sim Pois(\lambda_1+\lambda_2)$$

- Condizionale: $\mathbb{P}(X=k \mid Y=\ell) = \dfrac{\mathbb{P}(X=k, Y=\ell)}{\mathbb{P}(Y=\ell)} \implies \begin{cases} \mathbb{E}(X \mid Y=\ell) \\ Var(X \mid Y=\ell) \end{cases}$

- Thm (Markov): $Y \geq 0 \to \mathbb{P}(Y \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{a}$

- Thm (Chebyshev): $\mu = \mathbb{E}(X)$, $\sigma = SD(X) \to \mathbb{P}(|X-\mu| \geq \alpha) \leq \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$

- LLN: X_i iid con $\mathrm{Var}(X_i) < \infty$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum^{n} X_i$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0 .$$

Foglio di esercizi 7

Discussione soluzioni: 02.05.2022

* Rappresenta gli esercizi prioritari

1. Sia X una v.a. reale con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < -1; \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, & \text{per } -1 \leq x < 1; \\ 1, & \text{per } x \geq 1. \end{cases}$$

   (a) Verificare che F_X sia una funzione di ripartizione.
   (b) X è discreta? continua? assolutamente continua?
   (c) Calcolare le probabilità $P(X \geq 0)$, $P(X = 0)$ e $P(X = -1)$.

2. Sia X una v.a. reale con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \sqrt{x}1_{0<x<1} + 1_{x \geq 1}.$$

   Verificare che X è assolutamente continua e calcolarne la densità.

3. (a) Sia X una v.a. reale discreta e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana. Si dimostri che $g(X)$ è una v.a. discreta.
   (b) Mostrare che, se X è una variabile aleatoria continua, la variabile aleatoria $W = \max(0, \min(X, 1))$ può essere continua, discreta o né continua né discreta, a seconda della legge di X.

4. * Si consideri X variabile aleatoria di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-(x-\lambda)}, & x > \lambda, \\ 0, & x \leq \lambda. \end{cases}$$

   (a) Determinare per quali λ questa è una densità di probabilità e calcolare la funzione di ripartizione corrispondente.
   (b) Posta $Y = e^X$, si determini la distribuzione di Y.
   (c) Si calcoli $P(Y < 2)$.
   (d) Si calcolino $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y^2)$ e $\mathrm{Var}(Y)$.
   (e) Si calcolino $P(X > 3)$ e $P(X^3 > 27)$.
   (f) Si calcoli la media di $3X^2 - 1$.
   (g) Stimare la probabilità che X assuma valori distanti dalla media più di 2 unità, utilizzando la disuguaglianza di Chebychev.

5. Il raggio R di un certo tipo di particella inquinante, espresso in micron, è una variabile aleatoria con densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c\, x\, e^{-x^2}, & \text{per } x > 0, \\ 0, & \text{per } x \leq 0. \end{cases}$$

   (a) Determinare il valore della costante reale c.
   (b) Calcolare la funzione di ripartizione di R.

(c) Calcolare la mediana e la media di R.

(d) Calcolare la probabilità che una particella abbia un raggio superiore a 2 micron.

(e) Calcolare la legge della variabile aleatoria X che vale 1 se $R < 2$ e 0 altrimenti.

(f) Supponendo che le particelle inquinanti siano delle sfere, calcolare la probabilità che una particella abbia un volume superiore ad 1 micron cubo.

6. Sia X una v.a. reale, definita su uno spazio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con $X \geq 0$ q.c.; sia F_X la sua funzione di ripartizione. Dimostrare che

$$E[X] = \int_0^\infty P\{X > t\}dt = \int_0^\infty (1 - F_X(t))dt.$$

Sia ora X una v.a. reale (non necessariamente ≥ 0 q.c.). Dedurre che X è integrabile se e solo se

$$\int_0^\infty P\{X > t\}dt < \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^0 P\{X < t\}dt < \infty$$

e in questo caso vale

$$E[X] = \int_0^\infty P\{X > t\}dt - \int_{-\infty}^0 P\{X < t\}dt.$$

7. * Data $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, se ne consideri il suo arrotondamento per eccesso Y, ovvero

$$Y = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, I_{(k-1,k]}(X) = \lceil X \rceil.$$

Se quindi X rappresenta un tempo d'attesa, Y rappresenta il corrispondente tempo d'attesa per un osservatore stroboscopico. Si mostri che Y è una variabile aleatoria e se ne calcoli la distribuzione.

Sia poi $Z = Y - X$. Si calcoli la funzione di ripartizione di Z.
Suggerimento: si considerino tutti i possibili valori di Y.

8. * Un vettore aleatorio (X, Y) ha la seguente densità di probabilità

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{4xy}{\theta^2} e^{-x^2/\theta}\ 1_{(0,\infty)\times(0,x)}(x, y).$$

(a) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

(b) Calcolare le densità marginali di (X, Y).

(c) Per $\theta = 1$, calcolare $P\{X > 1, Y > 1\}$.

(d) Per $\theta = 1$, calcolare $E[X/Y]$.

9. * Siano $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti con densità $f_1, \dots, f_n$ e funzioni di ripartizione $F_1, \dots, F_n$. Calcolare, la funzione di ripartizione e la densità di $U = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $W = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Considerare il caso $f_1 = \cdots = f_n = f$, ed in particolare se f è

(a) la densità di una variabile aleatoria uniforme su $(0, 1)$

(b) la densità di una variabile aleatoria esponenziale con parametro $\lambda > 0$.

10. Per quali valori dei parametri le seguenti sono funzioni di ripartizione? per quali valori le corrispondenti v.a. sono continue? assolutamente continue? Per i casi di v.a. assolutamente continue, si determini la densità.

(a) $F(x) = \lambda(\arctan x + \pi/2)$;

(b) $F(x) = ae^{\lambda x} 1_{(-\infty,0)}(x) + (b - ce^{-\lambda x})1_{[0,+\infty)}(x)$, con $\lambda > 0$.

11. * Siano X, Y v.a. reali indipendenti con $X \sim U([0,1])$ e Y assolutamente continua con densità $f_Y(y) = 2y1_{(0,1)}(y)$. Calcolare:

   (a) $P\{X > 1/2, Y > 1/2\}$;

   (b) $P\{X^2 > Y\}$;

   (c) $P\{X > 1/2, X + Y < 1\}$;

   (d) $E\left[\frac{X^2}{Y}\right]$.

12. Sia X una v.a. reale continua (cioè tale che $P\{X = x\} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) e contentrata su $(0, +\infty)$ (cioè tale che $P\{X \in (0, +\infty)\} = 1$). Si dice che X gode della proprietà di assenza di memoria se

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t), \quad \forall s, t > 0.$$

   Dimostrare che una v.a. X continua e concentrata su $(0, +\infty)$ gode della proprietà di assenza di memoria se e solo se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ (variabile esponenziale) per qualche $\lambda > 0$.
   Suggerimento: calcolare prima la funzione di ripartizione della v.a. esponenziale.

13. Una persona compra un lotto di 5 lampadine led. Il lotto può arrivare da due aziende (a) e (b): arriva da (a) con probabilità 2/3 e da (b) con probabilità 1/3.
   Il tempo di vita (misurato in anni) di una lampadina prodotta da (a), rispettivamente da (b), segue una distribuzione esponenziale di parametro 1/4, rispettivamente 1/6.
   Siano X_i, $i = 1, \ldots 5$, i tempi di vita delle 5 lampadine.

   (a) Modellizzare il problema.

   (b) Calcolare la legge di X_1.

   (c) Le v.a. X_i sono indipendenti?

   (d) Calcolare la probabilità che almeno 2 lampadine abbiano tempo di vita maggiore di 6 anni.

   (e) Se almeno 2 lampadine hanno tempo di vita maggiore di 6 anni, calcolare la probabilità che le lampadine vengano dall'azienda (a).

14. (Disuguaglianza di Jensen) Sia ϕ una funzione convessa[1]. Si consideri una variabile aleatoria X tale che $P(X \in (a, b)) = 1$. Si assuma inoltre che $E(X)$ e $E(\phi(X))$ esistono, cioé che $E(|X|) < \infty$ e $\mathbb{E}(|\phi(X)|) < \infty$.

   (a) Mostrare che per ogni $c \in (a, b)$ si può trovare una funzione lineare $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\phi(x) \geq l(x) \qquad \text{per ogni } x \in (a, b)$$

   e che $\phi(c) = l(c)$.
   Suggerimento: Si può assumere che la funzione ϕ ammetta derivate da sinistra ϕ'_- e da destra ϕ'_+ per ogni $x \in (a, b)$. Spiegare perché $\phi_-(x) \leq \phi_+(x)$ per ogni $x \in (a, b)$ e poi dimostrare che per ogni $s \in [\phi_-(c), \phi_+(c)]$ si può costruire una funzione l con le proprietà desiderate.

   (b) Mostrare che sotto le assunzioni su X di cui sopra vale che

$$\mathbb{E}(\phi(X)) \geq \phi(\mathbb{E}(X))$$

   Suggerimento: usare il risultato di a) scegliendo attentamente il valore di c.

[1] Ricordiamo che una funzione ϕ è convessa sull'intervallo (a, b) se per ogni $x, y \in (a, b)$ e $\lambda \in [0, 1]$ vale che

$$\phi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\phi(x) + (1 - \lambda)\phi(y)$$

1. Sia X una v.a. reale con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < -1; \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, & \text{per } -1 \leq x < 1; \\ 1, & \text{per } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Verificare che F_X sia una funzione di ripartizione.

(b) X è discreta? continua? assolutamente continua?

(c) Calcolare le probabilità $P(X \geq 0)$, $P(X = 0)$ e $P(X = -1)$.

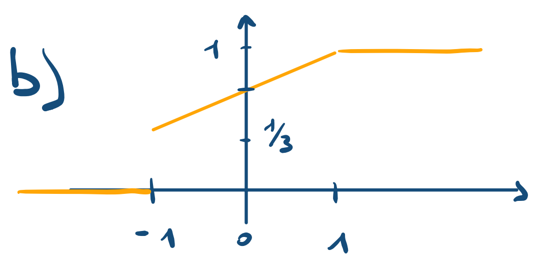
Richiamo: funzione di ripartizione $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(z)\,dz$

- non decrescente, non negativa
- continua a destra
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

a) • Chiaramente $F_X(x) \geq 0$

- $F_X(x) \geq F_X(x')$ se $x \geq x'$
- $\lim_{z \downarrow x} F_X(z) = F_X(x)$ (gli unici punti dove non si ha continuità sono $x = 1$, $x = -1$, dove la condizione è facilmente verificata)
- $\lim_{z \to -\infty} F_X(z) = 0$, $\lim_{z \to \infty} F_X(z) = 1$

b)



- la variabile non è discreta: $P(X \in (-1,1)) = \frac{2}{3}$ ma $P(X = x) = F_X(x) - \lim_{z \uparrow x} F_X(z) = 0 \quad \forall x \in (-1,1)$
- non è continua: $P(X = -1) = F_X(-1) - \lim_{z \uparrow -1} F_X(z) = \frac{1}{3} \neq 0$

$\Longrightarrow$ non è assol. continua

c) $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = 0$, $P(X \geq 0) = 1 - \lim_{z \uparrow 0} F_X(z) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

2. Sia X una v.a. reale con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \sqrt{x} 1_{0<x<1} + 1_{x\geq 1}.$$

Verificare che X è assolutamente continua e calcolarne la densità.

Consideriamo l'ansatz per la derivata:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

notiamo che $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \sqrt{x} & x \in [0,1) \\ 1 & x \in [1, \infty) \end{cases}$

che corrisponde a $F_X(x)$. F_X è quindi assolutamente continua con densità $f_X(x)$.

3. (a) Sia X una v.a. reale discreta e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana. Si dimostri che $g(X)$ è una v.a. discreta.

(b) Mostrare che, se X è una variabile aleatoria continua, la variabile aleatoria $W = \max(0, \min(X, 1))$ può essere continua, discreta o né continua né discreta, a seconda della legge di X.

a) Sia R_{p_X} il range di X, allora per ogni $y \in g(R_{p_X})$ abbiamo $y = g(x)$ per almeno un $x \in R_{p_X}$ e siccome X è discreta $\mathbb{P}(X = x) > 0$, quindi

$$\mathbb{P}(g(X) = y) \geq \mathbb{P}(X = x) > 0 .$$

b) continua: $f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\Rightarrow f_W(x) = F_W'(x) = F_X'(x) = f_X(x) \Rightarrow \text{continua}$$

discreta: $f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in (1,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\Rightarrow F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

né discreta né continua: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (0,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\Rightarrow F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

4. * Si consideri X variabile aleatoria di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-(x-\lambda)}, & x > \lambda, \\ 0, & x \leq \lambda. \end{cases}$$

(a) Determinare per quali λ questa è una densità di probabilità e calcolare la funzione di ripartizione corrispondente.

(b) Posta $Y = e^X$, si determini la distribuzione di Y.

(c) Si calcoli $P(Y < 2)$.

(d) Si calcolino $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y^2)$ e $\mathrm{Var}(Y)$.

(e) Si calcolino $P(X > 3)$ e $P(X^3 > 27)$.

(f) Si calcoli la media di $3X^2 - 1$.

(g) Stimare la probabilità che X assuma valori distanti dalla media più di 2 unità, utilizzando la disuguaglianza di Chebychev.

a) Sempre nonnegativa.

$$1 \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{\lambda}^{\infty} \lambda e^{-(x-\lambda)}\,dx = \lambda e^{\lambda} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} = \lambda$$

$\Rightarrow \lambda = 1$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - e^{-(x-1)} & x \geq 1 \end{cases}$$

b) $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(e^X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \log(y))$

$$= \begin{cases} 0 & \log y < 1 \\ 1 - e^{-(\log(y) - 1)} & \log y \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y < e \\ 1 - \frac{e}{y} & y \geq e \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{e}{y^2} I_{[e,\infty)}(y)$$

c) $\mathbb{P}(Y < 2) = \lim_{y \uparrow 2} F_Y(y) = 0$

d) Siccome $\int_e^{\infty} |y| f_Y(y)\, dy = \infty$ $\quad \mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(Y^2), \mathrm{Var}(Y)$

non sono definite

e) $\mathbb{P}(X \geq 3) = \int_3^{\infty} e^{(1-x)}\, dx = e^{-2}$

$\mathbb{P}(X^3 \geq 27) = \mathbb{P}(X \geq 3) = e^{-2}$

f) $\mathbb{E}(3X^2 - 1) = 3\mathbb{E}(X^2) - 1 = 3\int_1^{\infty} x^2 e^{1-x}\, dx - 1 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$

g) $\mathbb{E}(X) = \int_1^{\infty} x e^{1-x}\, dx = 2$ $\qquad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 5 - 4 = 1$

$\Longrightarrow \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 2) = \frac{\sigma^2}{4} = \frac{1}{4}$

5. Il raggio R di un certo tipo di particella inquinante, espresso in micron, è una variabile aleatoria con densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c\,x\,e^{-x^2}, & \text{per } x > 0, \\ 0, & \text{per } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Determinare il valore della costante reale c.

(b) Calcolare la funzione di ripartizione di R.

(c) Calcolare la mediana e la media di R.

(d) Calcolare la probabilità che una particella abbia un raggio superiore a 2 micron.

(e) Calcolare la legge della variabile aleatoria X che vale 1 se $R < 2$ e 0 altrimenti.

(f) Supponendo che le particelle inquinanti siano delle sfere, calcolare la probabilità che una particella abbia un volume superiore ad 1 micron cubo.

a) $1 \overset{!}{=} c \int_0^\infty x\, e^{-x^2} dx = \frac{c}{2} \implies c = 2$

b) $F_R(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

c) Mediana m : $\mathbb{P}(X \leq m) = \mathbb{P}(X \geq m) = \frac{1}{2}$ se

$$1 - e^{-x^2} = \frac{1}{2} \iff x = \sqrt{\log 2}$$

Media μ : $\mathbb{E}(R) = \int_0^\infty x\, f_X(x)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

d) $\mathbb{P}(R > 2) = 1 - \mathbb{P}(R \leq 2) = 1 - F_R(2) = e^{-4}$

e) $p_X(x) = \begin{cases} e^{-4} & \text{se } x = 0 \\ 1 - e^{-4} & \text{se } x = 1 \end{cases}$

f) $P\left(\frac{4}{3}\pi R^3 > 1\right) = P\left(R > \sqrt[3]{3/4\pi}\right) = \exp\left(-\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}\right)$

6. Sia X una v.a. reale, definita su uno spazio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con $X \geq 0$ q.c.; sia F_X la sua funzione di ripartizione. Dimostrare che

$$E[X] = \int_0^{\infty} P\{X > t\}dt = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t))dt.$$

Sia ora X una v.a. reale (non necessariamente ≥ 0 q.c.). Dedurre che X è integrabile se e solo se

$$\int_0^{\infty} P\{X > t\}dt < \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{0} P\{X < t\}dt < \infty$$

e in questo caso vale

$$E[X] = \int_0^{\infty} P\{X > t\}dt - \int_{-\infty}^{0} P\{X < t\}dt.$$

a) $$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x f_X(x)\,dx = \int_0^\infty x F_X'(x)\,dx = \int_0^\infty x\,(F_X(x)-1)'\,dx$$

$$\overset{P.I.}{=} -\int_0^\infty x'\,(F_X(x)-1)\,dx = \int_0^\infty (1-F_X(x))\,dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X>x)\,dx.$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) = \int_{-\infty}^{0} (-x) f_X(x)\,dx + \int_0^\infty x f_X(x)\,dx = \mathbb{E}(-X_-) + \mathbb{E}(X_+)$$

$$= \int_0^\infty \mathbb{P}(-X_- > x)\,dx + \int_0^\infty \mathbb{P}(X_+ > x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_- < -x)\,dx + \int_0^\infty \mathbb{P}(X_+ > x)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \mathbb{P}(X < x)\,dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\,dx}_{\geq 0}$$ $\longrightarrow$ entrambi devono essere finiti perché il risultato lo sia

$$\longrightarrow \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\,dx + \int_0^\infty x f_X(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} (-x) f_X(x)\,dx + \int_0^\infty x f_X(x)\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \mathbb{P}(X < x)\,dx + \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\,dx$$

7. * Data $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, se ne consideri il suo arrotondamento per eccesso Y, ovvero

$$Y = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, I_{(k-1,k]}(X) = \lceil X \rceil.$$

Se quindi X rappresenta un tempo d'attesa, Y rappresenta il corrispondente tempo d'attesa per un osservatore stroboscopico. Si mostri che Y è una variabile aleatoria e se ne calcoli la distribuzione.

Sia poi $Z = Y - X$. Si calcoli la funzione di ripartizione di Z.
Suggerimento: si considerino tutti i possibili valori di Y.

a) range$(Y) = \mathbb{N} / \{0\} = \{1,2,3,\dots\}$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda}\left(e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k}\right) = e^{-\lambda(k-1)}(1-e^{-\lambda})$$

$$= (1-q)^{k-1} q \qquad \text{dove} \qquad q = (1-e^{-\lambda})$$

$$Y \sim \text{Geom}(1-e^{-\lambda})$$

b) range$(Z) = (0,1)$.

$$f_Z(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(z+(k-1))} = \lambda e^{-z\lambda}\left[\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda j}\right] = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} e^{-\lambda z}$$

$z \in (0,1)$

8. * Un vettore aleatorio (X, Y) ha la seguente densità di probabilità

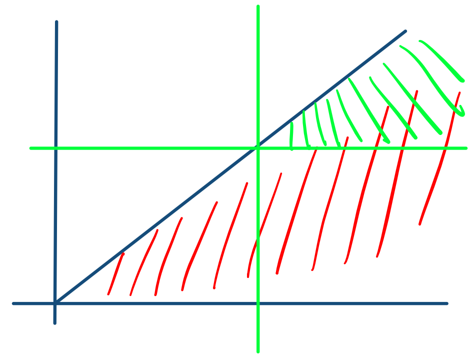
$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{4xy}{\theta^2} e^{-x^2/\theta} \, 1_{(0,\infty)\times(0,x)}(x,y).$$

(a) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

(b) Calcolare le densità marginali di (X, Y).

(c) Per $\theta = 1$, calcolare $P\{X > 1, Y > 1\}$.

(d) Per $\theta = 1$, calcolare $E[X/Y]$.



a) Nel caso di variabili indipendenti abbiamo

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \forall x \in \text{range}(X),\ y \in \text{range}(Y)$$

In questo caso chiaramente $\text{range}(X) = \text{range}(Y) = (0, \infty)$

ma

$$f_{XY}(3,5) = 0 \neq f_X(3) \cdot f_Y(5)$$

$\Rightarrow$ non sono indipendenti

b) $$f_X(x) = \int_0^x f_{(XY)}(x,y)\, dy = \frac{2x^3 e^{-x^2/\theta}}{\theta^2} \qquad x > 0$$

$$f_Y(y) = \int_y^\infty f_{(XY)}(x,y)\, dx = \frac{2y e^{-y^2/\theta}}{\theta} \qquad y > 0$$

c) $$\mathbb{P}(X > 1, Y > 1) = \int_1^\infty \int_1^x 4xy e^{-x^2}\, dy\, dx = e^{-1}$$

d) $$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \int_0^\infty \int_0^x \frac{x}{y} 4xy e^{-x^2}\, dy\, dx = 2$$

9. * Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti con densità $f_1, \ldots, f_n$ e funzioni di ripartizione $F_1, \ldots, F_n$. Calcolare, la funzione di ripartizione e la densità di $U = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $W = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Considerare il caso $f_1 = \cdots = f_n = f$, ed in particolare se f è

(a) la densità di una variabile aleatoria uniforme su $(0, 1)$

(b) la densità di una variabile aleatoria esponenziale con parametro $\lambda > 0$.

a) $F_U(u) = \mathbb{P}(\max(X_1 \ldots X_n) \leq u) =$

$= \mathbb{P}(X_1 \leq u, X_2 \leq u \ldots X_n \leq u) =$

$= \mathbb{P}(X_1 \leq u) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \leq u) = \prod_{i=1}^{n} F_i(u)$

$\rightarrow f_U(u) = F_U'(u) = \sum_j F_1(u) \ldots F_{j-1}(u) \cdot f_j(u) F_{j+1}(u) \ldots F_n(u)$

b) $F_W(w) = \mathbb{P}(\min(X_1 \ldots X_n) \leq w) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1 \ldots X_n) > w)$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > w) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(X_i \leq w))$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(w))$

$f_W(w) = F_W'(w) = \sum_{i=1}^{n} (1 - F_1(w)) \ldots (1 - F_{i-1}(w)) \cdot f_i(w) (1 - F_{i+1}(w)) \ldots (1 - F_n(w))$

a') $X \sim \mathrm{Unif}((0,1)) \longrightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in (0,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \longrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ x & x \in [0,1) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ per $u, w \in (0,1)$ $\begin{cases} f_U(u) = n u^{n-1} \\ f_W(w) = n(1-w)^{n-1} \end{cases}$

b') $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \Longrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$\Rightarrow$ per $u, w \geq 0$ $\begin{cases} f_U(u) = n(1 - e^{-\lambda u})^{n-1} \lambda e^{-\lambda u} \\ f_W(w) = n(e^{-\lambda w})^{n-1} \lambda e^{-\lambda w} = n \lambda e^{-\lambda n w} \sim \mathrm{Exp}(n\lambda) \end{cases}$

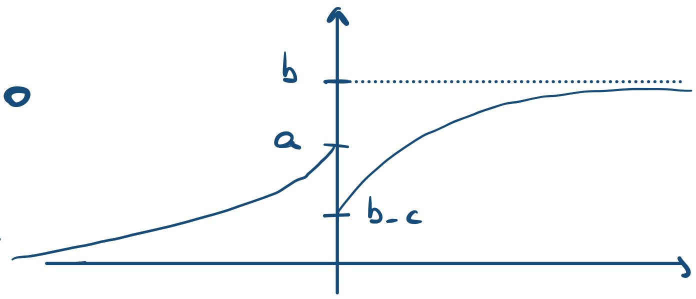
10. Per quali valori dei parametri le seguenti sono funzioni di ripartizione? per quali valori le corrispondenti v.a. sono continue? assolutamente continue? Per i casi di v.a. assolutamente continue, si determini la densità.

(a) $F(x) = \lambda(\arctan x + \pi/2)$;

(b) $F(x) = ae^{\lambda x}1_{(-\infty,0)}(x) + (b - ce^{-\lambda x})1_{[0,+\infty)}(x)$, con $\lambda > 0$.

a) $\lambda = \frac{1}{\pi}$

b) • $F(x) \geq 0$ se $b \geq c$, $b \geq 0$



• Comportamento crescente:

$$F'(x) = a\lambda e^{\lambda x} 1_{(-\infty,0)}(x) + c\lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x) \geq 0 \quad \text{se } \begin{cases} a \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \uparrow 0} F(x) = a \leq b - c = F(0) \quad \text{se } a \leq b-c$$

• $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \forall a, b, c$

$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \quad b = 1, \ \forall a, c$

$\Longrightarrow \ b = 1, \ 0 \leq a \leq 1 - c \quad 0 \leq c \leq 1$

11. * Siano X, Y v.a. reali indipendenti con $X \sim U([0,1])$ e Y assolutamente continua con densità $f_Y(y) = 2y\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$. Calcolare:

(a) $P\{X > 1/2, Y > 1/2\}$;

(b) $P\{X^2 > Y\}$;

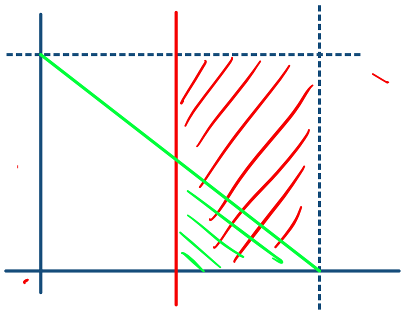
(c) $P\{X > 1/2, X + Y < 1\}$;

(d) $E\left[\frac{X^2}{Y}\right]$.

a) $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X > \frac{1}{2}) \cdot \mathbb{P}(Y > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \int_{1/2}^{1} 2y \, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

b) $\mathbb{P}(X^2 > Y) = \int_0^1 \int_0^{x^2} f_{XY}(x,y) \, dy \, dx = \int_0^1 x^4 \, dx = \frac{1}{5}$

c) $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2}, X + Y < 1) = \int_{1/2}^{1} \int_0^{1-x} f_{XY}(x,y) \, dy \, dx = \frac{1}{24}$



d) $\mathbb{E}\left(\frac{X^2}{Y}\right) \overset{X \perp Y}{=} \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{y} \cdot 2y \, dy = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

12. Sia X una v.a. reale continua (cioè tale che $P\{X = x\} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) e contentrata su $(0, +\infty)$ (cioè tale che $P\{X \in (0, +\infty)\} = 1$). Si dice che X gode della proprietà di assenza di memoria se

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t), \quad \forall s, t > 0.$$

Dimostrare che una v.a. X continua e concentrata su $(0, +\infty)$ gode della proprietà di assenza di memoria se e solo se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ (variabile esponenziale) per qualche $\lambda > 0$.
Suggerimento: calcolare prima la funzione di ripartizione della v.a. esponenziale.

$$\mathbb{P}(X > u) = \int_u^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda u}$$

"$\Leftarrow$" $\quad \mathbb{P}(X > s+t \mid X > s) = \dfrac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \dfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t)$

"$\Rightarrow$" $\quad P(X > s+t) = \mathbb{P}(X > s) \cdot \mathbb{P}(X > t)$

$\Leftrightarrow \quad F(s+t) = F(s) \cdot F(t)$

$\Rightarrow$ • per ogni intero n : $F(nt) = F(t)^n$

• per ogni intero m : $F(t/m) = F(t)^{1/m}$

$\Rightarrow$ per ogni razionale $F(t \frac{n}{m}) = F(t)^{n/m}$

$\Rightarrow$ prendendo i numeri irrazionali come limiti di razionali

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad : \quad F(xt) = F(t)^x$

$\Rightarrow$ fissiamo $t = 1$: $F(x) = F(1)^x = e^{\ln F(1) \cdot x}$

$\Rightarrow \quad F(x) = e^{-\lambda x} \qquad \lambda := -\ln(F(1))$.

$\Rightarrow \quad f_X(x) = \dfrac{d}{dx}(1 - F(x)) = \lambda e^{-\lambda x}$

13. Una persona compra un lotto di 5 lampadine led. Il lotto può arrivare da due aziende (a) e (b): arriva da (a) con probabilità 2/3 e da (b) con probabilità 1/3.
Il tempo di vita (misurato in anni) di una lampadina prodotta da (a), rispettivamente da (b), segue una distribuzione esponenziale di parametro 1/4, rispettivamente 1/6.
Siano X_i, $i = 1, \dots 5$, i tempi di vita delle 5 lampadine.

(a) Modellizzare il problema.

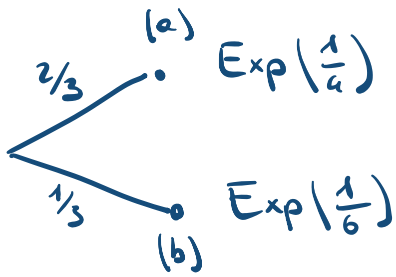
(b) Calcolare la legge di X_1.

(c) Le v.a. X_i sono indipendenti?

(d) Calcolare la probabilità che almeno 2 lampadine abbiano tempo di vita maggiore di 6 anni.

(e) Se almeno 2 lampadine hanno tempo di vita maggiore di 6 anni, calcolare la probabilità che le lampadine vengano dall'azienda (a).

a)



$$X_i = I\, Y_i + (1 - I) Z_i$$

$$Z_i \overset{iid}{\sim} Exp\left(\tfrac{1}{6}\right) \quad Y_i \overset{iid}{\sim} Exp\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

$$I \sim Be\left(\tfrac{2}{3}\right)$$

b) $$\mathbb{P}(X_1 \geq x) = \mathbb{P}(X_1 \geq x \mid I = 1)\,\mathbb{P}(I = 1) + \mathbb{P}(X_1 \geq x \mid I = 0)\,\mathbb{P}(I = 0)$$

$$= \mathbb{P}(Y_1 \geq x)\,\mathbb{P}(I = 1) + \mathbb{P}(Z_1 \geq x)\,\mathbb{P}(I = 0)$$

$$= e^{-x/4}\,\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,e^{-x/6}$$

$$\rightarrow f_{X_1}(x) = F'_{X_1}(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,\frac{1}{18}\left(3e^{-x/4} + e^{-x/6}\right)$$

c) Non lo sono :

$$\mathbb{P}(X_1 \geq x_1, X_2 \geq x_2) = \frac{2}{3} \cdot e^{-x_1/4}\, e^{-x_2/4} + \frac{1}{3}\, e^{-x_1/6}\, e^{-x_2/6}$$

$$\neq \left(\frac{2}{3} e^{-x_1/4} + \frac{1}{3} e^{-x_1/6}\right)\left(\frac{2}{3} e^{-x_2/4} + \frac{1}{3} e^{-x_2/6}\right)$$

d) $$\mathbb{P}(N_6 \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(N_6 = 0) - \mathbb{P}(N_6 = 1)$$

$$\mathbb{P}(Z_i \geq 6) = e^{-6/6} = e^{-1}$$

$$\mathbb{P}(Y_i \geq 6) = e^{-6/4} = e^{-3/2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(N_6 = 0) = \mathbb{P}(N_6 = 0 \mid I = 0)\mathbb{P}(I = 0) + \mathbb{P}(N_6 = 0 \mid I = 1)\mathbb{P}(I = 1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - e^{-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(1 - e^{-3/2}\right)^5$$

$$\mathbb{P}(N_6 = 1) = \dots = \frac{1}{3}\binom{5}{1}\left(1 - e^{-1}\right)^4 e^{-1} + \frac{2}{3}\binom{5}{1}\left(1 - e^{-\frac{2}{3}}\right)^4 e^{-\frac{2}{3}}$$

e) $$\mathbb{P}(I = 1 \mid N_6 \geq 2) = \frac{\mathbb{P}(N_6 \geq 2 \mid I = 1) \cdot \mathbb{P}(I = 1)}{\mathbb{P}(N_6 \geq 2)} = \dots$$

14. (Disuguaglianza di Jensen) Sia ϕ una funzione convessa[1]. Si consideri una variabile aleatoria X tale che $P(X \in (a,b)) = 1$. Si assuma inoltre che $E(X)$ e $E(\phi(X))$ esistono, cioé che $E(|X|) < \infty$ e $\mathbb{E}(|\phi(X)|) < \infty$.

(a) Mostrare che per ogni $c \in (a,b)$ si può trovare una funzione lineare $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\phi(x) \geq l(x) \qquad \text{per ogni } x \in (a,b)$$

e che $\phi(c) = l(c)$.
Suggerimento: Si può assumere che la funzione ϕ ammetta derivate da sinistra ϕ'_- e da destra ϕ'_+ per ogni $x \in (a,b)$. Spiegare perché $\phi_-(x) \leq \phi_+(x)$ per ogni $x \in (a,b)$ e poi dimostrare che per ogni $s \in [\phi_-(c), \phi_+(c)]$ si può costruire una funzione l con le proprietà desiderate.

(b) Mostrare che sotto le assunzioni su X di cui sopra vale che

$$\mathbb{E}(\phi(X)) \geq \phi(\mathbb{E}(X))$$

Suggerimento: usare il risultato di a) scegliendo attentamente il valore di c.

a) Sia $x \in (a,b)$, $b-x > t \geq \varepsilon > 0$

$$\Longrightarrow \varphi(x+\varepsilon) = \varphi\left(\frac{\varepsilon}{t}(x+t) + \left(1-\frac{\varepsilon}{t}\right)x\right) \leq \frac{\varepsilon}{t}\varphi(x+t) + \left(1-\frac{\varepsilon}{t}\right)\varphi(x)$$

$$\Longrightarrow \frac{\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)}{\varepsilon} \leq \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$$

$$\Longrightarrow \frac{\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)}{\varepsilon} \text{ è crescente in } \varepsilon.$$

Inoltre se $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ $\quad \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)}{\varepsilon}}_{\to \varphi'_+(x)} \geq \underbrace{\frac{-\varphi(x-\varepsilon)+\varphi(x)}{\varepsilon}}_{\to \varphi'_-(x)} \Longrightarrow \varphi'_+(x) \geq \varphi'_-(x)$$

$$\begin{cases} \text{for } x < c & \dfrac{\varphi(c)-\varphi(x)}{c-x} \leq \varphi'_-(x) \\ \text{for } x > c & \dfrac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c} \geq \varphi'_+(x) \end{cases} \quad \xrightarrow{s \in [\varphi_-, \varphi_+]} \quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(c)-\varphi(x)}{c-x} \leq s \\ \dfrac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c} \geq s \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \varphi(x)-\varphi(c) \geq s(x-c) \Longrightarrow \varphi(x) \geq sx + (\varphi(c)-sc)$$

b) Sia $c = \mathbb{E}(X) \in (a,b)$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \mathbb{E}(\ell(X)) = \ell(\mathbb{E}(X)) = \varphi(\mathbb{E}(X))$$

Foglio di esercizi 8

Discussione soluzioni: 09.05.2022

* Rappresenta gli esercizi prioritari

1. * Data $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si dimostri che $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ se $a \neq 0$.
2. * Data $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, si calcoli la distribuzione di Z^2.
3. * Data $X \sim U\big((0, 1)\big)$, si stabilisca per quali α la variabile aleatoria $Y = (1 - X)^{-\alpha} \in L^1$.
4. Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie iid con $X_i \sim Exp(\lambda)$. Si calcoli la legge di $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Si tratta di una legge conosciuta?
5. Una variabile aleatoria X è detta di Cauchy se ha densità
$$p(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$
   (a) Verificare che p è una densità di probabilità e scrivere esplicitamente la funzione di ripartizione. X ammette media? E varianza?
   (b) Calcolare la legge di $Y = X^2$. Y ha media?
   (c) Dopo aver verificato che la variabile aleatoria $Z = 1/X$ è ben posta, calcolare la legge di Z. Z ha media? E varianza?
6. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti tali che $X \sim Exp(\lambda)$ e $Y \sim Exp(\mu)$. Calcolare la densità e la funzione di ripartizione di $Z = X + Y$ e $W = \alpha X$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si tratta di leggi note?
7. * Siano (X, Y) le coordinate aleatorie di un punto nel piano, con X e Y due variabili aleatorie Gaussiane standard e indipendenti. Siano (R, θ) le coordinate polari del medesimo punto. Dopo aver determinato la distribuzione di R^2 e di θ, ottenuto la densità di R e aver verificato che R e θ sono indipendenti,
   (a) calcolare il valore atteso di $\frac{X^2}{R^2}$
   (b) calcolare il valore atteso del quoziente tra le variabili aleatorie $\min\{|X|, |Y|\}$ e $\max\{|X|, |Y|\}$.
8. Fissato $\mu \in \mathbb{R}$, sia
$$p(x) = cx^\mu \mathbb{1}_{\{x \in (0,1)\}}.$$
   (a) Determinare μ affinché p sia integrabile su $\mathbb{R}$.
   (b) Per tali valori di μ, trovare c affinché p sia una densità di probabilità.
   (c) Sia X una variabile aleatoria con densità data da p con $\mu = 1$. Calcolare la densità della variabile aleatoria $X^2 + 1$.
   (d) Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, X con densità p con $\mu = 1$ e Y esponenziale di parametro 1. Calcolare la legge di $X + Y$.
9. * Sia (X, Y) una variabile aleatoria su $\mathbb{R}^2$ con densità continua
$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{x^3 y^2} \mathbb{1}_{\{x>1, y>x\}}$$
   (a) Calcolare $P[Y < 2X]$.
   (b) Calcolare la legge congiunta di $U = \log X$ e $V = X/Y$ e le relative densità marginali.

(c) Calcolare la legge di $Z = X + Y$.

10. Si consideri la densità di probabilità data da

$$f_X(x) = \frac{\theta}{x^2} \mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x),$$

con $\theta > 0$. Si proponga un opportuno stimatore per θ basato su un campione casuale $X_1, X_2, \dots, X_n$ estratto da una popolazione di densità f_X .

(a) Stabilire se lo stimatore proposto è corretto.

(b) Stabilire se la successione di stimatori proposta, al variare della numerosità del campione è consistente.

(c) Utilizzare lo stimatore trovato per determinare intervalli di fiducia al livello $1-\alpha$ per il parametro θ.

11. * Sia dato un campione $X_1, \dots, X_n$ di legge uniforme su $(0, \theta)$, $\theta > 0$. Siano

$$\hat{\theta}_n = \max(X_1, \dots, X_n), \qquad \bar{\theta}_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

(a) $\hat{\theta}_n$ è una stima corretta di θ? è asintoticamente corretta?

(b) Calcolare il rischio quadratico (medio) della stima $\hat{\theta}_n$ di θ $R(\theta, \hat{\theta}_n) = \mathbb{E}_\theta[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$.

(c) è vero che $\lim_{n\to\infty} R(\theta, \hat{\theta}_n) = 0$? La successione di stime $(\hat{\theta}_n)_n$ è consistente?

(d) Dimostrare che $\hat{\theta}_n$ coincide con la stima di massima verosimiglianza per θ.

(e) La stima $\bar{\theta}_n$ di θ è corretta? è asintoticamente corretta?

(f) Calcolare il rischio quadratico (medio) della stima $\bar{\theta}_n$ di θ $R(\theta, \bar{\theta}_n) = \mathbb{E}_\theta[(\bar{\theta}_n - \theta)^2]$

(g) è vero che $\lim_{n\to\infty} R(\theta, \bar{\theta}_n) = 0$? Tale stima $\bar{\theta}_n$ è consistente?

(h) $\hat{\theta}_n$ è preferibile rispetto a $\bar{\theta}_n$?

12. Si consideri un campione $X_1, \dots, X_n$ di legge uniforme su $[a - b, a + b]$, $b > 0$. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per (a, b), studiarne la correttezza, la consistenza e calcolarne il rischio quadratico (medio).

Def: Stimatore di massima verosimiglianza per un parametro λ: dato un campione iid $\underbrace{\{X_1 \dots X_n\}}_{\underline{X}}$ con distribuzione $X_i \sim f_\lambda(x)$

$$\hat{\lambda}(\underline{X}) = \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}}\, \mathcal{L}_\lambda(\underline{X})$$

con $\mathcal{L}$ funzione di verosimiglianza

$$\mathcal{L}_\lambda(\underline{X}) = f_\lambda(\underline{X}) \overset{\text{iid}}{=} \prod_{j=1}^{n} f_\lambda(x_j)$$

Def: $\hat{\lambda}$ è corretto se $\mathbb{E}_\lambda(\hat{\lambda}) - \lambda = 0$

$\hat{\lambda}$ è consistente se $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\hat{\lambda}(\underline{X}_n) - \lambda| > \varepsilon) = 0$

Def: Errore quadratico medio

$$\mathbb{E}_\lambda\left((\hat{\lambda}(\underline{X}) - \lambda)^2\right)$$

$$\mathbb{E}((\lambda - \hat{\lambda})^2) = \mathbb{E}\left(\left((\lambda - \mathbb{E}(\hat{\lambda})) - (\hat{\lambda} - \mathbb{E}(\hat{\lambda}))\right)^2\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\underbrace{(\lambda - \mathbb{E}(\hat{\lambda}))}_{\in\mathbb{R}}{}^2 + (\hat{\lambda} - \mathbb{E}(\hat{\lambda}))^2 - 2\underbrace{(\lambda - \mathbb{E}(\hat{\lambda}))}_{\in\mathbb{R}}(\hat{\lambda} - \mathbb{E}(\hat{\lambda}))\right)$$

$$= \underbrace{(\lambda - \mathbb{E}(\hat{\lambda}))^2}_{\text{Bias}^2} + \underbrace{\mathbb{E}((\hat{\lambda} - \mathbb{E}(\hat{\lambda}))^2)}_{\text{var}(\hat{\lambda})} - 2(\lambda - \mathbb{E}(\hat{\lambda}))\underbrace{\mathbb{E}(\hat{\lambda} - \mathbb{E}(\hat{\lambda}))}_{\mathbb{E}(\hat{\lambda}) - \mathbb{E}(\hat{\lambda})} \to 0$$

1. * Data $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si dimostri che $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ se $a \neq 0$.
2. * Data $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, si calcoli la distribuzione di Z^2.
3. * Data $X \sim U((0, 1))$, si stabilisca per quali α la variabile aleatoria $Y = (1 - X)^{-\alpha} \in L^1$.
4. Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie iid con $X_i \sim Exp(\lambda)$. Si calcoli la legge di $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Si tratta di una legge conosciuta?

1) Sappiamo che per ogni $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ se $Z \sim N(0,1)$ allora $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\Longrightarrow Y = aX + b = a(\mu + \sigma Z) + b = \underbrace{(a\mu + b)}_{\mu'} + \underbrace{a\sigma}_{\sigma'} Z$$

$$\longrightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$$

2) $$F_{Z^2}(z) = \mathbb{P}(Z^2 \leq z) = \mathbb{P}(-\sqrt{z} \leq Z \leq \sqrt{z}) = \Phi(\sqrt{z}) - \Phi(-\sqrt{z})$$

$$= 2\Phi(\sqrt{z}) - 1$$

$$\Longrightarrow f_{Z^2}(z) = \frac{d}{dz} F_{Z^2}(z) = 2\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\sqrt{z}} \phi(y)\,dy = 2\,\phi(\sqrt{z}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}$$

3) $$f_Y(y)\,dy = f_X(x(y))\left|\frac{dx}{dy}\right|dy = f_X(x(y))\left|\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}\right|dy$$

$$y = (1-x)^{-\alpha} \Longrightarrow 1 - x = y^{-1/\alpha} \Longrightarrow x(y) = 1 - y^{-1/\alpha}, \quad \frac{d}{dx}y(x) = \alpha(1-x)^{-(\alpha+1)}$$

$$\text{range}(Y) = \begin{cases} [0,1] & \alpha > 0 \\ \{1\} & \alpha = 0 \\ [1, \infty) & \alpha < 0 \end{cases}$$

$-\frac{\alpha+1}{\alpha}$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\frac{1}{\alpha}(1-x)^{+(\alpha+1)} = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\frac{1}{\alpha}y^{-(1+\frac{1}{\alpha})} & \alpha > 0 \\ \delta(y-1) & \alpha = 0 \\ \mathbb{1}_{[1,\infty)}(y)\frac{1}{|\alpha|}y^{-(1+\frac{1}{\alpha})} & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \begin{cases} \int_0^1 \cancel{y}\frac{1}{\alpha}y^{-(\cancel{1}+\frac{1}{\alpha})} < \infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} y\,\delta(y-1)\,dy = 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ \int_1^{\infty} \cancel{y}\frac{1}{|\alpha|}y^{-(\cancel{1}+\frac{1}{\alpha})}\,dy = \infty & \forall\ \alpha < 0 \end{cases}$$

$Y \in L^1$ solo se $\alpha \in \{0\} \cup (1,\infty)$

4) Dimostriamo per induzione che $Y_k = \sum_{j=1}^{k} X_j \sim \Gamma(k,\lambda)$

$\underline{k=1}$: $X_1 \sim \text{Geom}(\lambda) = \Gamma(1,\lambda)$

$\underline{k \to k+1}$: $Y_{k+1} = Y_k + X_{k+1}$

$$f_{Y_{k+1}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(t-x)}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t-x)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(t\cancel{-x})}\mathbb{1}_{(-\infty,t]}(x)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}x^{k-1}\cancel{e^{-\lambda x}}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,dx$$

$$= e^{-\lambda t}\lambda^{k+1}\cdot\frac{1}{(k-1)!}\int_0^t x^{k-1}\,dx = \lambda^{k+1}\frac{1}{k!}t^k e^{-\lambda t}$$

$\Rightarrow \square$

7. * Siano (X, Y) le coordinate aleatorie di un punto nel piano, con X e Y due variabili aleatorie Gaussiane standard e indipendenti. Siano (R, θ) le coordinate polari del medesimo punto. Dopo aver determinato la distribuzione di R^2 e di θ, ottenuto la densità di R e aver verificato che R e θ sono indipendenti,

(a) calcolare il valore atteso di $\frac{X^2}{R^2}$

(b) calcolare il valore atteso del quoziente tra le variabili aleatorie $\min\{|X|, |Y|\}$ e $\max\{|X|, |Y|\}$.

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\,dy = \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr\,d\theta}_{f_{R,\theta}(r,\theta) = f_R(r) \cdot f_\theta(\theta)}$$

$$f_R(r) \to e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \qquad f_\theta(\theta) \to \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi)}$$

a) $$\mathbb{E}\left(\frac{X^2}{R^2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{(R\cos(\Theta))^2}{R^2}\right) =$$

$$= \mathbb{E}(\cos(\Theta)^2) = \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr \; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 d\theta$$

$X = R\cos\Theta$

$Y = R\sin\Theta$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \frac{(2\pi)}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

b) $$\mathbb{E}\left(\frac{\min|X|,|Y|}{\max|X|,|Y|}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\cancel{R}\min|\cos\Theta|,|\sin\Theta|}{\cancel{R}\max|\cos\Theta|,|\sin\Theta|}\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\min|\cos\theta|,|\sin\theta|}{\max|\cos\theta|,|\sin\theta|} d\theta = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\min}{\max} d\theta$$

$$= \frac{4}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}\,d\vartheta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)}\,d\vartheta\right)$$

$$= \frac{4}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/4} \tan(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\vartheta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\vartheta)}\,d\vartheta\right)$$

$$= \frac{4}{2\pi}\left(\left(-\log\cos(\vartheta)\right)\Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \tan(\vartheta)\,d\vartheta\right)$$

$$= \frac{4}{2\pi}\left(-\log\cos\frac{\pi}{4}\cdot 2\right) = \frac{8}{2\pi}\log\sqrt{2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\log 2$$

10. Si consideri la densità di probabilità data da

$$f_X(x) = \frac{\theta}{x^2}\mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x),$$

con $\theta > 0$. Si proponga un opportuno stimatore per θ basato su un campione casuale $X_1, X_2, \ldots, X_n$ estratto da una popolazione di densità f_X .

(a) Stabilire se lo stimatore proposto è corretto.

(b) Stabilire se la successione di stimatori proposta, al variare della numerosità del campione è consistente.

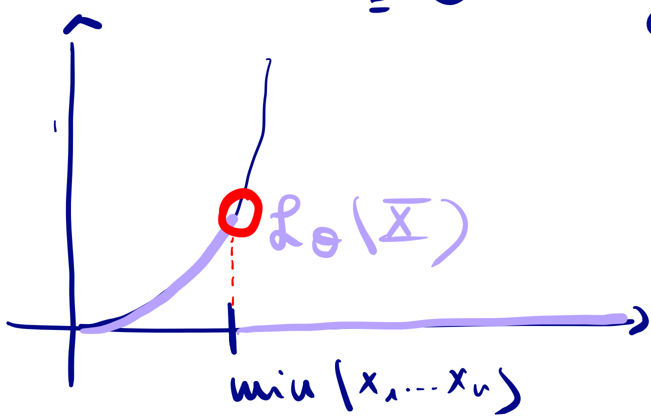
(c) Utilizzare lo stimatore trovato per determinare intervalli di fiducia al livello $1-\alpha$ per il parametro θ.

$$z)\ \mathcal{L}_\theta(\overline{X}) = f_\theta(\overline{X}) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{\theta}{x_j^2}\mathbb{1}_{x_j \geq \theta} = \theta^n \left(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j^2}\right)\left(\prod_{j=1}^{n}\mathbb{1}_{x_j\geq\theta}\right)$$

$$= \theta^n \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j^2}\cdot \mathbb{1}_{\cap\{x_j\geq\theta\}}$$

$$= \theta^n \prod x_j^{-2}\cdot \mathbb{1}_{\theta\leq \min(x_1 \cdots x_n)}$$



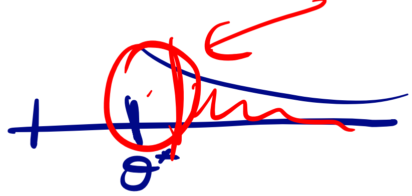
$$\Longrightarrow \hat{\theta}_n(\overline{X}) = \min(x_1 .. x_i)$$

$$a)\ \mathbb{E}(\min(X_1)) = \mathbb{E}(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{x}\,\theta\,\frac{1}{x^{\cancel{2}}}\mathbb{1}_{x\geq\theta}$$

$$= \theta\int_{\theta}^{\infty}\frac{1}{x}\,dx = \theta(\log\infty - \log(\theta)) = \infty$$

$\longrightarrow$ non è corretto.

b) Sia $X_i \overset{iid}{\sim} f_{\theta^*}(x)$



$$P(|\min(X_i) - \theta^*| > \varepsilon) = P(\min(X_i) - \theta^* > \varepsilon)$$

$$= P(\min X_i > \theta^* + \varepsilon) = P\left(\bigcap \{X_i > \theta^* + \varepsilon\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq \theta^* + \varepsilon) = \left(P(X_i \geq \theta^* + \varepsilon)\right)^n$$

$$= \left(\int_{\theta^*+\varepsilon}^{\infty} \frac{\theta^*}{x^2}\, dx\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\theta^*}}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

11. * Sia dato un campione $X_1, \ldots, X_n$ di legge uniforme su $(0, \theta)$, $\theta > 0$. Siano

$$\hat{\theta}_n = \max(X_1, \ldots, X_n), \qquad \bar{\theta}_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

(a) $\hat{\theta}_n$ è una stima corretta di θ? è asintoticamente corretta?

(b) Calcolare il rischio quadratico (medio) della stima $\hat{\theta}_n$ di θ $R(\theta, \hat{\theta}_n) = \mathbb{E}_\theta[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$.

(c) è vero che $\lim_{n\to\infty} R(\theta, \hat{\theta}_n) = 0$? La successione di stime $(\hat{\theta}_n)_n$ è consistente?

(d) Dimostrare che $\hat{\theta}_n$ coincide con la stima di massima verosimiglianza per θ.

(e) La stima $\bar{\theta}_n$ di θ è corretta? è asintoticamente corretta?

(f) Calcolare il rischio quadratico (medio) della stima $\bar{\theta}_n$ di θ $R(\theta, \bar{\theta}_n) = \mathbb{E}_\theta[(\bar{\theta}_n - \theta)^2]$

(g) è vero che $\lim_{n\to\infty} R(\theta, \bar{\theta}_n) = 0$? Tale stima $\bar{\theta}_n$ è consistente?

(h) $\hat{\theta}_n$ è preferibile rispetto a $\bar{\theta}_n$?

a) Sappiamo che per $U = \max(X_1, \ldots X_n)$, $X_i \sim \text{unif}((0,\theta))$

$$f_U(u|\theta) = n\left(\frac{u}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(u) \qquad \frac{u}{\theta} = t$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}_\theta(U) = \int_0^\theta n\left(\frac{u}{\theta}\right)^n du = n\theta \int_0^1 t^n dt$$

$$= \frac{n}{n-1}\theta \neq \theta \quad \Rightarrow \text{stimatore non è corretto}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\theta = \theta \quad \Rightarrow \text{stimatore asintoticamente corretto.}$$

b) $$\mathbb{E}_\theta((\theta - \hat{\theta}_n)^2) = \mathbb{E}_\theta((\theta - U)^2) = \theta^2 - 2\theta\, \mathbb{E}_\theta(U) + \mathbb{E}_\theta(U^2)$$

$$= \theta^2 - 2\theta \frac{n}{n-1}\theta + \int_0^\theta n\left(\frac{u}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} u^2 du =$$

$$= \theta^2\left(1 - \frac{2n}{n-1}\right) + \theta^2 \int_0^1 n\, t^{n+1} dt$$

$$= \theta^2\left(1 - \frac{2n}{n-1}\right) + \theta^2 \frac{n}{n} = 2\theta^2 \frac{1}{n-1} = \frac{2\theta^2}{n-1}$$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2\vartheta^2}{n-1} = 0 \implies$ la successione di stime è consistente per Markov:

$$\mathbb{P}(|\hat{\vartheta}_n - \vartheta| > \varepsilon) = \mathbb{P}((\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}((\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{2\vartheta^2}{n-1}}{\varepsilon^2}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\hat{\vartheta}_n - \vartheta| > \varepsilon) = 0$$

d) vedi note corso.

e) $\mathbb{E}_\vartheta(\bar{\vartheta}_n) = \mathbb{E}_\vartheta\left(\frac{2}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\vartheta(X_j) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^n \frac{\vartheta}{2} = \vartheta$

$\implies$ stimatore corretto e dunque asintoticamente corretto

f) $\mathbb{E}_\vartheta((\vartheta - \bar{\vartheta}_n)^2) = \vartheta^2 - 2\vartheta\,\mathbb{E}_\vartheta(\bar{\vartheta}_n) + \mathbb{E}_\vartheta(\bar{\vartheta}_n^2) =$

$$= \frac{4}{n^2}\mathbb{E}_\vartheta\left(\sum_j X_j^2 + \sum_{i\neq j} X_j X_i\right) - \vartheta^2$$

$$= \frac{4}{n^2}\left(n\,\mathbb{E}_\vartheta(X_1^2) + (n^2 - n)\,\mathbb{E}_\vartheta(X_1)^2\right) - \vartheta^2$$

$$= \frac{4}{n^2}\left(n\,\mathrm{Var}_\vartheta(X_1^2) + n^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2\right) - \vartheta^2$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{4}{12}\vartheta^2 = \frac{\vartheta^2}{3n}$$

g) Come sopra $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}((\vartheta - \bar{\vartheta}_n)^2) = 0$

$\Longrightarrow$ consistente.

h) Notiamo che $R_n(\vartheta, \bar{\vartheta}_n) \leq R_n(\vartheta, \hat{\vartheta}_n)$

quindi $\hat{\vartheta}_n$ non è preferibile rispetto a $\bar{\vartheta}_n$

9. * Sia (X, Y) una variabile aleatoria su $\mathbb{R}^2$ con densità continua

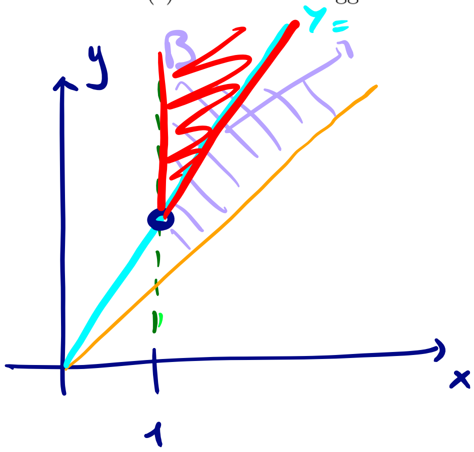
$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{x^3 y^2}\mathbb{1}_{\{x>1, y>x\}}$$

(a) Calcolare $P[Y < 2X]$.

(b) Calcolare la legge congiunta di $U = \log X$ e $V = X/Y$ e le relative densità marginali.

(c) Calcolare la legge di $Z = X + Y$.

a)



$$\mathbb{P}(Y<2X) = 1 - \mathbb{P}(Y \geq 2X)$$

$$= 1 - \int_1^\infty \int_{2x}^\infty \frac{3}{x^3 y^2}\, dy\, dx =$$

$$= 1 - \int_1^\infty \frac{\cancel{3}}{x^3} \underbrace{\int_{2x}^\infty \frac{1}{y^2}\, dy}_{\frac{1}{\cancel{3}}\frac{1}{(2x)^3}}\, dx = 1 - \int_1^\infty \frac{1}{8 \cdot x^6}\, dx = \frac{1}{8 \cdot 7}\left[\frac{1}{x^7}\right]_1^\infty$$

$$= 1 - \frac{1}{56} = \frac{55}{56}$$

Euristica: $f_{UV}(u,v)\, du\, dv = f_{XY}(x(u,v), y(u,v))\, |\det J|\, du\, dv = f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$

$$J = \partial_{(u,v)} \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

b) $(x(u,v), y(u,v)) = \left(\exp(u), \frac{x}{v}\right) = \left(\exp(u), \frac{\exp(u)}{v}\right)$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\left(\exp(u), \frac{\exp(u)}{v}\right) \left|\det \begin{pmatrix} \exp(u) & 0 \\ \frac{\exp(u)}{v} & -\frac{1}{v^2}\exp(u) \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{3}{(e^u)^3 \cancel{\left(\frac{1}{v} e^u\right)^2}} \mathbb{1}\left(e^u > 1, \frac{\cancel{e^u}}{v} > \cancel{e^u}\right) \cancel{e^u \cdot \frac{1}{v^2} e^u}$$

$$= 3e^{-3u} \cdot \mathbb{1}_{(u>0,\ v\in(0,1))}$$

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)\, dv = 3e^{-3u}\mathbb{1}_{u>0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{(0,1)}(v)\, dv = 3e^{-3u}\mathbb{1}_{u>0}$$

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)\, du = \mathbb{1}_{v\in(0,1)} \int_0^{\infty} 3e^{-3u} = \mathbb{1}_{v\in(0,1)}$$

c) $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{x^3(z-x)^2} \mathbb{1}_{x>1,\ \underbrace{z-x>x}_{x<\frac{z}{2}}}\, dx$$

$$= \int_1^{z/2} \frac{3}{x^3(z-x)^2}\, dx = 3\left(z - \frac{2}{z-1} - \frac{8}{z} + 4 + 6\log\left(1-\frac{z}{2}\right)\right)$$

6. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti tali che $X \sim Exp(\lambda)$ e $Y \sim Exp(\mu)$. Calcolare la densità e la funzione di ripartizione di $Z = X + Y$ e $W = \alpha X$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si tratta di leggi note?

$$a)\ f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda w} \mathbb{1}_{w \geq 0} \cdot \mu e^{-\mu(z-w)} \mathbb{1}_{\underbrace{z-w \geq 0}_{w \leq z}} \, dw$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } z \leq 0 \\ \lambda\mu \int_0^z e^{-\lambda w} \cdot e^{-\mu \cdot z} e^{\mu w} dw = \lambda\mu e^{-\mu z} \int_0^z e^{-(\lambda-\mu)w} dw = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\left(e^{-z\lambda} - e^{-z\mu}\right) & z \geq 0 \end{cases}$$

b) $W = \alpha X \quad g(x) = \alpha x \qquad g^{-1}(w) = \frac{1}{\alpha} \cdot w \qquad$ assume $\alpha > 0$

$$f_W(w) = f_X(g^{-1}(w)) \cdot \left|\frac{d}{dw} g^{-1}(w)\right| = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\alpha} w} \cdot \left|\frac{1}{\alpha}\right| = \begin{cases} \frac{\lambda}{|\alpha|} e^{-\frac{\lambda}{\alpha} w} & w \geq 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases}$$

5. Una variabile aleatoria X è detta di Cauchy se ha densità

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

(a) Verificare che p è una densità di probabilità e scrivere esplicitamente la funzione di ripartizione. X ammette media? E varianza?

(b) Calcolare la legge di $Y = X^2$. Y ha media?

(c) Dopo aver verificato che la variabile aleatoria $Z = 1/X$ è ben posta, calcolare la legge di Z. Z ha media? E varianza?

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x)\right)_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ ✓

⚠ per definire valore atteso $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)\, dx < \infty$

$y = 1+x^2 \quad dy = 2x\,dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{1}{y}\, dy \; \cancel{<\infty}$

$\Longrightarrow \mathbb{E}(X)$ non def. $\quad Var(X)$ non def.

b) $g(x) = x^2 \qquad g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y} \qquad g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y} \quad g_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \left|\frac{d}{dy}\sqrt{y}\right| + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \left|\frac{d}{dy}(-\sqrt{y})\right| =$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\sqrt{y}^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{1+(-\sqrt{y})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} & y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\int_0^{\infty} y \cdot \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y}\frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \infty \quad ⚡$

$z \neq 0$

c) $z = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{z} \longrightarrow f_Z(z) = f_X\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left|\frac{d}{dz}\frac{1}{z}\right|$

$\Longrightarrow Z \sim \text{Cauchy} \Rightarrow \nexists\ \mathbb{E}(Z)\ Var(Z)$ $= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} \cdot \left|\frac{1}{z^2}\right| = \frac{1}{1+z^2}\frac{1}{\pi}$

8. Fissato $\mu \in \mathbb{R}$, sia

$$p(x) = cx^{\mu}\mathbb{1}_{\{x\in(0,1)\}}.$$

(a) Determinare μ affinché p sia integrabile su $\mathbb{R}$.

(b) Per tali valori di μ, trovare c affinché p sia una densità di probabilità.

(c) Sia X una variabile aleatoria con densità data da p con $\mu = 1$. Calcolare la densità della variabile aleatoria $X^2 + 1$.

(d) Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, X con densità p con $\mu = 1$ e Y esponenziale di parametro 1. Calcolare la legge di $X + Y$.

Richiamo: funzione di densità $f_X(x)$ [$p(x)$] soddisfa

$$\mathbb{P}(X\in(a,b)) = \int_a^b f_X(x)\,dx \quad \forall\, a<b \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \qquad \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} c\cdot x^{\mu}\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\,dx = c\int_0^1 x^{\mu}\,dx = \begin{cases} \left[c\,\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right]_0^1 & \mu \neq -1 \\ \left[c\log(x)\right]_0^1 & \mu = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mu > -1$$

b) $$1 \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \left[c\cdot\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right]_0^1 = c\cdot\frac{1}{1+\mu} \Longrightarrow c = 1+\mu$$

Richiamo: $Y = g(X)$

1) se g è invertibile $\Longrightarrow f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$

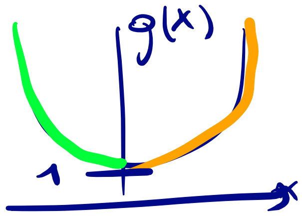
2) se g non è invertibile (su $\mathbb{R}$)

$\Longrightarrow$ scomponiamo g in $\{g_i\}^m$ $\quad g_i : A_i \to \mathbb{R}$

$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \mathbb{R}$ tali che g_i sia invertibile.

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \sum_{i=1}^{m} f_X(g_i^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Ex :



$g_1(x) : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$

$g_2(x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$f_Y(x) = f_X(g_1^{-1}) \dots$
$\quad + f_X(g_2^{-1}) \dots$

c) $\mu = 1 \longrightarrow p(x) = 2 \cdot x \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x).$

$g(x) = x^2 + 1 \qquad g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y-1} \longrightarrow \begin{cases} g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y-1} \\ g_2^{-1}(y) = \sqrt{y-1} \end{cases}$

$$f_Y(y) = f_X(-\sqrt{y-1}) \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{y-1}}\right| + f_X(\sqrt{y-1}) \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{y-1}}\right|$$

$$= 0 + \frac{\cancel{2\sqrt{y-1}} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(\sqrt{y-1})}{\cancel{2\sqrt{y-1}}} = \mathbb{1}_{(1,2)}(y)$$

d) $f_X(x) = 2x\, \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$

$f_Y(y) = e^{-y}\, \mathbb{1}_{y \geq 0}$

Richiamo: $f_{X+Y}(z) = f_X * f_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w) f_Y(z-w)\, dw$

$X ⫫ Y$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} 2w\, \mathbb{1}_{(0,1)}(w) \cdot e^{-(z-w)} \cdot \mathbb{1}_{z-w \geq 0}\, dw$$

$$= \int_0^1 2w\, e^{-(z-w)}\, \mathbb{1}_{z \geq w}(w)\, dw = 2e^{-z} \int_0^1 w e^w\, \mathbb{1}_{w \leq z}(w)\, dw$$

$$= \begin{cases} 2e^{-z} \int_0^z w e^w\, dw = 2e^{-z} \left(e^w (w-1)\right)_0^z & z < 1 \\ 2e^{-z} \left(e^w (w-1)\right)_0^1 & z \geq 1 \end{cases}$$

12. Si consideri un campione $X_1, \ldots, X_n$ di legge uniforme su $[a-b, a+b]$, $b > 0$. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per (a, b), studiarne la correttezza, la consistenza e calcolarne il rischio quadratico (medio).

$$\underline{X} = \{X_1 \ldots X_n\} \qquad X_i \sim \mathrm{Unif}(a-b, a+b)$$

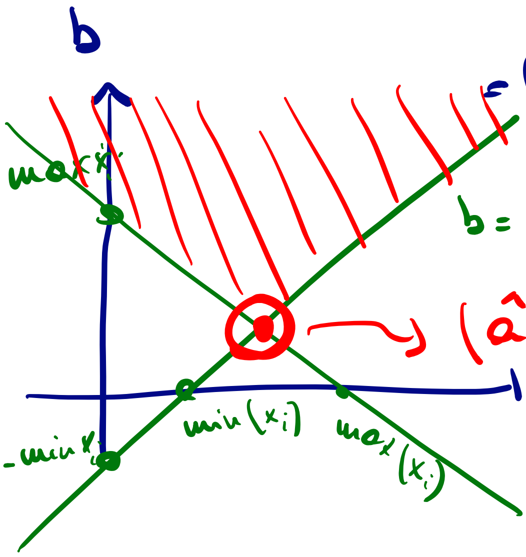
$$\mathcal{L}_{(a,b)}(\underline{X}) \overset{\text{indep}}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2b} \cdot \mathbb{1}_{x_i \in (a-b, a+b)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2b} \mathbb{1}_{x_i \geq a-b} \cdot \mathbb{1}_{x_i \leq a+b}$$

$$= \left(\frac{1}{2b}\right)^n \cdot \prod_{i} \mathbb{1}_{x_i \geq a-b} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{x_i \leq a+b}$$

$$= \left(\frac{1}{2b}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{\cap\{x_i \geq a-b\}} \mathbb{1}_{\cap\{x_i \leq a+b\}}$$

$$= \left(\frac{1}{2b}\right)^n \mathbb{1}_{\underbrace{\min_i x_i \geq a-b}_{b \geq a - \min(x_i)}} \cdot \mathbb{1}_{\underbrace{\max_i (x_i) \leq a+b}_{b \geq \max(x_i) - a}}$$



$$b = a - \min(x_i)$$

$$\to (\hat{a}, \hat{b})$$

$$b = -a + \max(x_i)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \hat{a} = \dfrac{\min(x_i) + \max(x_i)}{2} \\ \hat{b} = \dfrac{\max(x_i) - \min(x_i)}{2} \end{cases}$$

$$X_1 \sim \mathrm{unif}(-2, 2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}\left(\dfrac{\max(X_1) - \min(X_1)}{2}\right) = \mathbb{E}\left(\dfrac{X_1 - X_1}{2}\right) = 0 \neq 2 = b \\ \mathbb{E}\left(\dfrac{\max(X_1) + \min(X_1)}{2}\right) = \mathbb{E}\left(\dfrac{X_1 + X_1}{2}\right) = \mathbb{E}(X_1) = 0. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ b non è corretto. a è corretto.

• Errore quadratico medio.

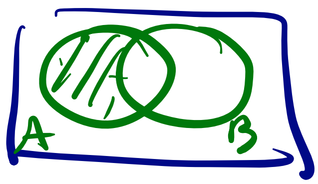
$$\mathbb{E}\left(\left(b - \frac{\min(X_i) - \max(X_i)}{2}\right)^2\right) = b^2 + \mathbb{E}\left(\left(\frac{\min(X_i) - \max(X_i)}{2}\right)^2\right) - 2b\,\mathbb{E}\left(\frac{\min(X_i) - \max(X_i)}{2}\right)$$

densità congiunta di $\min(X_i), \max(X_i)$

$X_i \sim \mathrm{Unif}(a-b, a+b)$.

$$\mathbb{P}(\min X_i \leq s, \max X_i \leq t) = F_{\min,\max}(s,t)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\underbrace{\cap\{X_i \leq t\}}_{A} \setminus \underbrace{\cap\{X_i \geq s\}}_{B}\Big)$$



$$= \underbrace{\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leq t\}\Big)}_{A} - \underbrace{\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{s \leq X_i \leq t\}\Big)}_{B \cap A}$$

$$= \prod \mathbb{P}(X_i \leq t) - \prod \mathbb{P}(s \leq X_i \leq t)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(X_i \leq t)^n}_{\left(\frac{t-(a-b)}{2b}\right)^n} - \underbrace{\mathbb{P}(s \leq X_i \leq t)^n}_{\left(\frac{t-s}{2b}\right)^n}$$

$$\Rightarrow f_{\min,\max}(s,t) = \partial_s \partial_t F_{\min,\max}(s,t) = \frac{n(n-1)}{(2b)^2} \cdot \left(\frac{t-s}{2b}\right)^{n-2}$$

$$E\left((b-\hat{b})^2\right) = \frac{(n+1)(n+2) + n(n+2) - 2(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}\, b^2$$

$$= \frac{3 \quad + 4}{(n+1)(n+2)}\, b^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Foglio di esercizi 9

Discussione soluzioni: 16.05.2023

* Rappresenta gli esercizi prioritari

1. Sia dato $\{X_1, \ldots, X_n\}$ un campione di legge (μ, σ^2). Per stimare μ si vuole usare
$$T_n = \frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
   (a) Lo stimatore T_n è corretto?
   (b) T_n è consistente?

2. * Sia dato $\{X_1, \ldots, X_n\}$ un campione di legge $\text{Unif}((-\theta, 4\theta))$. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ e discuterne la correttezza e la consistenza.

3. (continua dal foglio precedente) Si consideri la densità di probabilità data da
$$f_X(x) = \frac{\theta}{x^2}\mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x),$$
con $\theta > 0$. Si proponga un opportuno stimatore per θ basato su un campione casuale $X_1, X_2, \ldots, X_n$ estratto da una popolazione di densità f_X .
   (a) Stabilire se lo stimatore proposto è corretto.
   (b) Stabilire se la successione di stimatori proposta, al variare della numerosità del campione è consistente.
   (c) Utilizzare lo stimatore trovato per determinare intervalli di fiducia al livello $1-\alpha$ per il parametro θ.

4. * Sia dato un campione $X_1, \ldots, X_n$ di legge Gaussiana di parametri $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R}(0, \infty)$.
   (a) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di μ con $\sigma^2 = 1$.
   (b) Sempre per $\sigma^2 = 1$, utilizzare il metodo della quantità pivotale per trovare un intervallo di fiducia al livello 0.95 per μ.
   (c) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di σ^2 con μ noto.
   (d) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per (μ, σ^2).

5. Una impresa di componenti elettronici decide di stimare il numero medio di piccole imperfezioni su un sistema assemblato. A tale scopo analizza 16 sistemi e rileva che il numero medio di imperfezioni ammonta a 32 e che la varianza campionaria risulta 8. Supponendo che le imperfezioni abbiano distribuzione normale, determinare l'intervallo di fiducia al 95% e al 99% per il numero medio di piccole imperfezioni su sistemi assemblati.

6. * Dato $n \geq 1$, sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione di densità
$$f_\theta(x) = \theta \exp(x - \theta \exp(x)), \qquad \text{per } \theta > 0\,.$$
   (a) Determinare lo stimatore Θ_n di massima verosimiglianza di θ
   (b) Stabilire la correttezza e la consistenza della successione $(\Theta_n)_{n\geq 1}$
   (c) Dato $\alpha \in (0, 1)$, determinare una regione di fiducia al livello $1 - \alpha$ per θ

7. Dato $n \geq 1$, sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione di densità

$$f_\theta(x) = \frac{1}{12\theta^5} x^9 e^{-x^2/\theta} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

dove $\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ rappresenta la funzione indicatrice sull'insieme $(0, \infty)$.

(a) Determinare lo stimatore Θ_n di massima verosimiglianza di θ.

(b) Stabilire la correttezza della successione $(\Theta_n)_{n\geq 1}$.

(c) Dato $\alpha \in (0, 1)$, determinare una regione di fiducia al livello $1 - \alpha$ per θ.

8. Sia dato un campione $X_1, \ldots, X_n$ con comune funzione di ripartizione (sconosciuta) $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Sia $u \in \mathbb{R}$ e definiamo, per $i = 1, \ldots, n$,

$$Y_i(u) = \mathbb{1}_{X_i \leq u}$$

Il campione $Y_1(u), \ldots, Y_n(u)$ ha legge Bernoulli di parametro $F(u) \in [0, 1]$. Sia

$$\hat{F}_n(u) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i(u)$$

(a) $\hat{F}_n(u)$ è una stima non distorta di $F(u)$? Asintoticamente distorta?

(b) Calcolare il rischio quadratico (medio) $R(F(u), \hat{F}_n(u)) = \mathbb{E}_{F(u)}[(\hat{F}_n(u) - F(u))^2]$.

(c) La successione $\{\hat{F}_n(u)\}_n$ è consistente?

(d) Trovare un intervallo di fiducia al livello $1 - \alpha$, $0 < \alpha \ll 1$, per $F(u)$.

1. Sia dato $\{X_1, \dots, X_n\}$ un campione di legge $N(\mu, \sigma^2)$. Per stimare μ si vuole usare

$$T_n = \frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

(a) Lo stimatore T_n è corretto?

(b) T_n è consistente?

a) Calcoliamo:

$$\mathbb{E}_{\mu,\sigma}(T_n) = \mathbb{E}_{\mu,\sigma}\left(\frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}_{\mu,\sigma}(X_1) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(X_j)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{n}\cdot n\mu\right) = \mu \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow$ lo stimatore è corretto

b) $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) - \mu\right| > \varepsilon\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}X_1 + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} X_j\right) - \mu\right| > \varepsilon\right)$$

$$\geq \mathbb{P}\left(\left|\frac{n+1}{n}X_1 - \mu\right| > 2\varepsilon, \left|\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} X_j - \mu\right| < \varepsilon\right)$$

$$\geq \mathbb{P}\left(\frac{n+1}{n}X_1 - \mu > 2\varepsilon\right)\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} X_j - \mu\right| < \varepsilon\right)$$

$$\geq \underbrace{\mathbb{P}\left(X_1 > (\mu + 2\varepsilon)\frac{n}{n+1}\right)}_{\geq \mathbb{P}(X_1 > \mu + 2\varepsilon) = 1 - \Phi\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma}\right)} \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \mu\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\geq \frac{1}{2} \text{ per } n \gg 1} \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\geq \frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) - \mu\right| > \varepsilon\right) \geq \left(1 - \Phi\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma}\right)\right)\frac{1}{4} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

$\Longrightarrow$ non consistente.

2. * Sia dato $\{X_1, \ldots, X_n\}$ un campione di legge Unif$((-\theta, 4\theta))$. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ e discuterne la correttezza e la consistenza.

Scriviamo la densità $f_\theta(x) = \frac{1}{5\theta} \mathbb{1}_{(-\theta,4\theta)}(x)$

$$= \frac{1}{5\theta} \mathbb{1}_{(-\theta,\infty)}(x) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,4\theta)}(x)$$

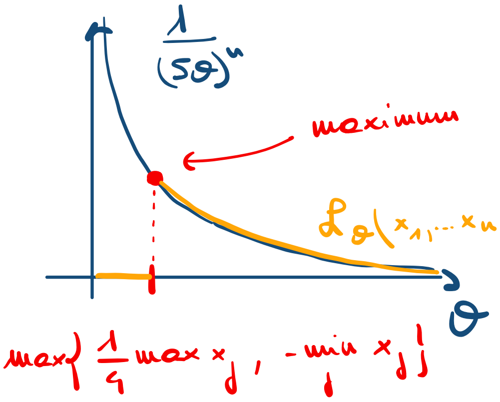
$$\Longrightarrow \mathcal{L}_\theta(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{5\theta} \mathbb{1}_{(-\infty,4\theta)}(x_j)\, \mathbb{1}_{(-\theta,\infty)}(x_j)$$

$$= \frac{1}{(5\theta)^n} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty,4\theta)}(x_j) \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\theta,\infty)}(x_\ell)$$

$$= \frac{1}{(5\theta)^n} \mathbb{1}_{(\max_j x_j,\infty)}(4\theta)\, \mathbb{1}_{(-\min_j x_j,\infty)}(\theta)$$

$$= \frac{1}{(5\theta)^n} \underbrace{\mathbb{1}_{(\frac{1}{4}\max x_j,\infty)}(\theta)\, \mathbb{1}_{(-\min x_j,\infty)}(\theta)}_{\mathbb{1}_{(\max\{\frac{1}{4}\max x_j,\, -\min_j x_j\},\infty)}(\theta)}$$



$$\Longrightarrow \Theta_n = \max\{\underbrace{\tfrac{1}{4}\max x_j}_{\Theta_n'},\, \underbrace{-\min x_j}_{\Theta_n''}\}$$

Corretteza: Discutiamo la distribuzione di Θ_n:

$$F_{X_j}(x) = \frac{x+\theta}{5\theta} \mathbb{1}_{(-\theta,4\theta)}(x) + \mathbb{1}_{[4\theta,\infty)}(x)$$

$$\Longrightarrow F_{\max x_j} = \left(\frac{x+\theta}{5\theta}\right)^n \mathbb{1}_{(-\theta,4\theta)}(x) + \mathbb{1}_{[4\theta,\infty)}(x)$$

$$\Rightarrow F_{\frac{1}{4}\max x_j}(x) = \left(\frac{4x+\vartheta}{5\vartheta}\right)^n \mathbb{1}_{\left(-\frac{\vartheta}{4},\vartheta\right)}(x) + \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}(x)$$

$$\Rightarrow F_{-\min x_j}(x) = P(-\min X_j \leq x) = P(\min X_j \geq -x)$$

$$= P(X_1 \geq -x)^n = (1 - F_{x_j}(-x))^n =$$

$$= \left(1 - \frac{-x+\vartheta}{5\vartheta}\right)^n \mathbb{1}_{(-\vartheta,4\vartheta)}(-x) + \mathbb{1}_{(-\infty,-\vartheta]}(-x)$$

$$= \left(\frac{4\vartheta+x}{5\vartheta}\right)^n \mathbb{1}_{(-4\vartheta,\vartheta)}(x) + \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}(x)$$

$$\longrightarrow F_{\Theta_n}(x) = \left(\frac{4\vartheta+x}{5\vartheta}\right)^n \left(\frac{4x+\vartheta}{5\vartheta}\right)^n \mathbb{1}_{\left(-\frac{\vartheta}{4},\vartheta\right)}(x) + \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}(x)$$

Notiamo che calcolare la densità associata ad F_{Θ_n} è calcoloso:

$$\Rightarrow f_{\Theta_n}(x) = \mathbb{1}_{\left(-\frac{\vartheta}{4},\vartheta\right)}(x)\, n \left(\frac{4\vartheta+x}{5\vartheta}\right)^{n-1} \left(\frac{4x+\vartheta}{5\vartheta}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{5\vartheta}\left(\frac{4x+\vartheta}{5\vartheta}\right) + \frac{4}{5\vartheta}\left(\frac{4\vartheta+x}{5\vartheta}\right)\right)$$

$$= \mathbb{1}_{\left(-\frac{\vartheta}{4},\vartheta\right)}(x)\, n \left(\frac{4\vartheta+x}{5\vartheta}\right)^{n-1} \left(\frac{4x+\vartheta}{5\vartheta}\right)^{n-1} \left(\frac{8x+17\vartheta}{5\vartheta}\right)$$

quindi ricorriamo a un "trucco":

$$\mathbb{E}_\theta(\Theta_n) = \int_0^\theta x\, f_{\Theta_n}(x)\, dx = \int_0^{\theta/2} x\, f_{\Theta_n}(x)\, dx + \int_{\theta/2}^{\theta} x\, f_{\Theta_n}(x)\, dx$$

$$\leq \frac{\theta}{2} F_{\Theta_n}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \theta\left(F_{\Theta_n}(\theta) - F_{\Theta_n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\begin{cases} F_{\Theta_n}\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \\ F_{\Theta_n}(\theta) = 1 \end{cases} \qquad < \theta\, F_{\Theta_n}(\theta) = \theta \implies \text{non corretto.}$$

<u>Consistenza</u>: $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|\Theta_n - \theta| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\Theta_n \leq \theta - \varepsilon) = F_{\Theta_n}(\theta - \varepsilon)$$

$$= \left(1 - \frac{\varepsilon}{5\theta}\right)^n \left(1 - \frac{4\varepsilon}{5\theta}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\implies$ consistente.

3. (continua dal foglio precedente) Si consideri la densità di probabilità data da

$$f_X(x) = \frac{\theta}{x^2}\mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x),$$

con $\theta > 0$. Si proponga un opportuno stimatore per θ basato su un campione casuale $X_1, X_2, \ldots, X_n$ estratto da una popolazione di densità f_X .

(a) Stabilire se lo stimatore proposto è corretto.

(b) Stabilire se la successione di stimatori proposta, al variare della numerosità del campione è consistente.

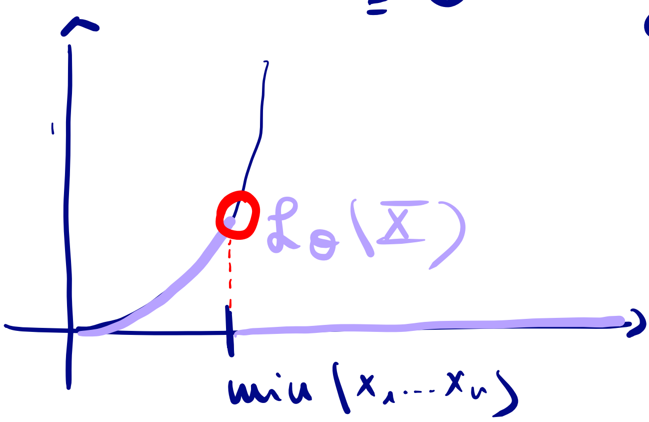
(c) Utilizzare lo stimatore trovato per determinare intervalli di fiducia al livello $1-\alpha$ per il parametro θ.

z) $\mathcal{L}_\theta(\underline{X}) = f_\theta(\underline{X}) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j)$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{\theta}{x_j^2}\,\mathbb{1}_{x_j \geq \theta} = \theta^n \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j^2}\right)\left(\prod_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{x_j \geq \theta}\right)$$

$$= \theta^n \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j^2} \cdot \mathbb{1}_{\cap\{x_j \geq \theta\}}$$

$$= \theta^n \prod x_j^{-2} \cdot \mathbb{1}_{\theta \leq \min(x_1 \dots x_n)}$$



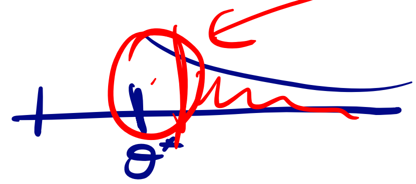
$$\Longrightarrow \hat{\theta}_n(\underline{X}) = \min(X_1 \dots X_i)$$

a) $\mathbb{E}(\min(X_1)) = \mathbb{E}(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{x}\,\theta\, \frac{1}{x^{\cancel{2}}}\,\mathbb{1}_{x \geq \theta}$

$$= \theta \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \theta(\log \infty - \log(\theta)) = \infty$$

$\longrightarrow$ non è corretto.

b) Sia $X_i \overset{iid}{\sim} f_{\theta^*}(x)$



$$P(|\min(X_i) - \theta^*| > \varepsilon) = P(\min(X_i) - \theta^* > \varepsilon)$$

$$= P(\min X_i > \theta^* + \varepsilon) = P\left(\bigcap \{X_i > \theta^* + \varepsilon\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq \theta^* + \varepsilon) = \left(P(X_i \geq \theta^* + \varepsilon)\right)^n$$

$$= \left(\int_{\theta^*+\varepsilon}^{\infty} \frac{\theta^*}{x^2}\, dx\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\theta^*}}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

c) Si consideri la distribuzione della variabile pivotale

$$\bar{\theta}_n = \frac{\min X_1 \dots X_n}{\theta} = \min \frac{X_1}{\theta} \dots \frac{X_n}{\theta}$$

con funzione di ripartizione

$$F_{\bar{\theta}_n}(y) = P(\bar{\theta}_n < y) = 1 - P(\bar{\theta}_n > y) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\frac{X_i}{\theta} > y\right) = 1 - \left(\int_y^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx\right)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{y^n} \qquad y \geq 1$$

$\hat{\theta}_n = \min X_1 \dots X_n$

$$\Longrightarrow 1 - \alpha = P(\bar{\theta}_n < y_\alpha) = P\left(\frac{\hat{\theta}_n}{\theta} < y_\alpha\right) = P\left(\theta > \frac{\hat{\theta}_n}{y_\alpha}\right)$$

dove $1 - \frac{1}{y_\alpha^n} = 1 - \alpha \longleftrightarrow y_\alpha = \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}$

4. * Sia dato un campione $X_1, \ldots, X_n$ di legge Gaussiana di parametri $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R}(0, \infty)$.

(a) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di μ con $\sigma^2 = 1$.

(b) Sempre per $\sigma^2 = 1$, utilizzare il metodo della quantità pivotale per trovare un intervallo di fiducia al livello 0.95 per μ.

(c) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di σ^2 con μ noto.

(d) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per (μ, σ^2).

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}_{\mu,\sigma}(\underline{X}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(X_j-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \cdot \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{\sum_j (X_j-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ell_{\mu,\sigma}(\underline{X}) = \log \mathcal{L}_{\mu,\sigma}(\underline{X}) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - n\log\sigma - \frac{\sum_j (X_j-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

a) $$\partial_\mu \ell_{\mu,\sigma}(\underline{X}) = 0 \iff -\partial_\mu \frac{\sum_j (X_j-\mu)^2}{2\sigma^2} = 0$$

$$\iff \cancel{-}\frac{\sum_j \cancel{2}(X_j-\mu)\cdot\cancel{(-1)}}{\cancel{2}\sigma^2} = 0$$

$$\iff \sum_j X_j - n\mu = 0$$

$$\iff \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_j X_j$$

b) $$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow Z_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \mu}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$\Longrightarrow$ Sia (A_-^α, A_+^α) un intervallo di confidenza per una distribuzione $N(0,1)$ al livello $1-\alpha$, allora

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(z_n \in (A_-^\alpha, A_+^\alpha)\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{1/\sqrt{n}} \in (A_-^\alpha, A_+^\alpha)\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\mu \in \left(\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{n}} A_+^\alpha, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{n}} A_-^\alpha\right)\right)$$

c) $$\partial_\sigma \ell_{\mu,\sigma}(\underline{X}) = 0 \iff -n\frac{1}{\sigma} + \frac{\sum_j (X_j - \mu)^2}{\sigma^3} = 0$$

$$\iff \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)^2$$

d) $$\begin{pmatrix} \partial_\mu \\ \partial_\sigma \end{pmatrix} \ell_{\mu,\sigma}(\underline{X}) = 0 \iff \begin{cases} \sum_j X_j - n\mu = 0 \\ -n\frac{1}{\sigma} + \frac{\sum_j (X_j - \mu)^2}{\sigma^3} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_j X_j \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_j (X_j - \hat{\mu})^2 \end{cases}$$

5. Una impresa di componenti elettronici decide di stimare il numero medio di piccole imperfezioni su un sistema assemblato. A tale scopo analizza 16 sistemi e rileva che il numero medio di imperfezioni ammonta a 32 e che la varianza campionaria risulta 8. Supponendo che le imperfezioni abbiano distribuzione normale, determinare l'intervallo di fiducia al 95% e al 99% per il numero medio di piccole imperfezioni su sistemi assemblati.

$n = 16 \quad , \quad \overline{X}_{16} = 32 \quad , \quad S^2 = 8$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\overline{X}_{16} - \mu}{S/\sqrt{16}} = T_{16} \sim t(15)$$

$\Longrightarrow$ Intervallo di fiducia bilatero

$$0.95 = P(a \leq T_{16} \leq b) = P\left(a \leq \frac{\overline{X}_{16} - \mu}{S/4} \leq b\right)$$

$$= P\left(\frac{\overline{X}_{16} - b}{S/4} \leq \mu \leq \frac{\overline{X}_{16} - a}{S/4}\right)$$

- $a_{5\%} = b_{5\%} = 2.131$

$$\Longrightarrow \quad IC_{95\%} = \left(\frac{32 - 2.131}{\sqrt{8}/4}, \frac{32 + 2.131}{\sqrt{8}/4}\right)$$

- $a_{2\%} = b_{2\%} = 2.602$

$$\Longrightarrow \quad IC_{95\%} = \left(\frac{32 - 2.602}{\sqrt{8}/4}, \frac{32 + 2.602}{\sqrt{8}/4}\right)$$

One-sided	75%	80%	85%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.75%	99.9%	99.95%
Two-sided	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.5%	99.8%	99.9%
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.321	318.309	636.619
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291
One-sided	75%	80%	85%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.75%	99.9%	99.95%
Two-sided	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.5%	99.8%	99.9%

6. * Dato $n \geq 1$, sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione di densità

$$f_\theta(x) = \theta \exp(x - \theta \exp(x)), \qquad \text{per } \theta > 0\,.$$

(a) Determinare lo stimatore Θ_n di massima verosimiglianza di θ

(b) Stabilire la correttezza e la consistenza della successione $(\Theta_n)_{n\geq 1}$

(c) Dato $\alpha \in (0,1)$, determinare una regione di fiducia al livello $1-\alpha$ per θ

a) $$\mathcal{L}_\vartheta(x_1,\ldots x_n) = \prod_{j=1}^n f_\vartheta(x_j) = \vartheta^n \exp\Big(\sum_{j=1}^n x_j - \vartheta \sum_{j=1}^n \exp(x_j)\Big)$$

$$= \exp\Big(n \log\vartheta + \sum_{j=1}^n x_j - \vartheta \sum_{j=1}^n \exp(x_j)\Big) \qquad \vartheta \in (0,\infty)$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} \log(\mathcal{L}_\vartheta(x_1,\ldots x_n)) = \frac{n}{\vartheta} - \sum_{j=1}^n \exp(x_j) \overset{!}{=} 0$$

maximum: $\partial^2_\vartheta \log \mathcal{L}_\vartheta < 0$

$$\Longrightarrow \quad \Theta_n = \Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \exp(X_j)\Big)^{-1}$$

b) Per $n=1$ abbiamo

$$\mathbb{E}_\vartheta(\Theta_1) = \mathbb{E}_\vartheta(e^{-X_1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{e^{-x}}\, \vartheta\, \cancel{e^{x}}{}^{-\vartheta\exp(x)}\, dx =$$

$$= \vartheta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\vartheta\exp(x)}\, dx = \infty \quad \Longrightarrow \text{ non corretto.}$$

per $n=1$

Per $n > 1$: Notiamo che $Y = \exp(X)$ ha densité

$x = \log y$

$$f_Y(y)\,dy = f_X(x(y)) \cdot \Big|\frac{dx}{dy}\Big|\, dy = \vartheta \cdot \exp(\log(y) - \vartheta y) \cdot \frac{1}{y}$$

$$= \vartheta \exp(-\vartheta y)$$

$$\Longrightarrow \quad Y_i = \exp(X_i) \sim \mathcal{E}xp(\vartheta)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}_\vartheta\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n e^{X_j}\right)^{-1}\right) = n\, \tilde{\mathbb{E}}_\vartheta\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^n Y_j}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^n Y_j = Z \sim \Gamma(\vartheta, n)$$

$$= n\, \hat{\tilde{\mathbb{E}}}_\vartheta\left(\frac{1}{Z}\right)$$

$$= n \int_0^\infty \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(n-1)!}\, \vartheta^n z^{n-1} e^{-\vartheta z}\, dz$$

$$= n\, \frac{1}{n-1}\, \vartheta \int_0^\infty \vartheta^{n-1} z^{n-2} e^{-\vartheta z}\, dz$$

$$= \frac{n}{n-1}\, \vartheta$$

$\Longrightarrow$ non corretto.

Consistenza: Consideriamo lo stimatore $\Psi_n = \frac{1}{\Theta_n}$

$$\mathbb{E}_\vartheta(\Psi_n) = \mathbb{E}_\vartheta\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n e^{X_j}\right) = \mathbb{E}_\vartheta(e^{X_1}) = \int \vartheta e^{2x} \exp(-\vartheta e^x)\, dx = \frac{1}{\vartheta}$$

$$\overset{LLN}{\Longrightarrow} \quad \mathbb{P}\left(\left|\Psi_n - \frac{1}{\vartheta}\right| \leq \delta\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n e^{X_j} - \mathbb{E}(e^{X_j})\right| \leq \delta\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad \forall \delta > 0$$

Ora, per ogni $\vartheta > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_{\vartheta,\varepsilon}$ tale che

$$\left|x - \frac{1}{\vartheta}\right| \leq \delta_{\theta,\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \vartheta\right| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow P(|\Theta_n - \vartheta| \leq \varepsilon) = P\left(\left|\frac{1}{\overline{\Psi}_n} - \vartheta\right| \leq \varepsilon\right)$$

$$\geq \mathbb{P}\left(\left|\overline{\Psi}_n - \frac{1}{\vartheta}\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow \text{consistente}$$

c) Notiamo che $Y = \exp(X)$ ha densità

$$f_Y(y)\,dy = f_X(x(y)) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| dy \overset{x = \log y}{=} \vartheta \cdot \exp(\log(y) - \vartheta y) \cdot \frac{1}{y}$$

$$= \vartheta \exp(-\vartheta y)$$

$$\Rightarrow Y_i = \exp(X_i) \sim \mathcal{E}xp(\vartheta)$$

$$\Rightarrow Z_i = 2\,\vartheta \exp(X_i) \sim \mathcal{E}xp\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{2n \cdot \vartheta \cdot \hat{\vartheta}_n}_{\text{variabile pivotale.}} = \sum_{j=1}^n \vartheta \exp(X_j) = \sum_{j=1}^n Z_j \sim \Gamma\left(n, \tfrac{1}{2}\right) = \chi^2(2n)$$

$\Rightarrow$ Sia (A_-^α, A_+^α) un intervallo di confidenza al livello $1-\alpha$ per $\chi^2(2n)$, allora

$$(1-\alpha) = P(2n\,\vartheta\,\Theta_n \in (A_-^\alpha, A_+^\alpha)) = \mathbb{P}\Big(\vartheta \in \underbrace{\left(\frac{A_-^\alpha}{n\Theta_n 2}, \frac{A_+^\alpha}{n\Theta_n 2}\right)}_{\text{IC di } \vartheta \text{ al liv. } (1-\alpha)}\Big)$$

7. Dato $n \geq 1$, sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione di densità

$$f_\theta(x) = \frac{1}{12\theta^5} x^9 e^{-x^2/\theta} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

dove $\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ rappresenta la funzione indicatrice sull'insieme $(0, \infty)$.

(a) Determinare lo stimatore Θ_n di massima verosimiglianza di θ.

(b) Stabilire la correttezza della successione $(\Theta_n)_{n\geq 1}$.

(c) Dato $\alpha \in (0, 1)$, determinare una regione di fiducia al livello $1 - \alpha$ per θ.

a) Calcoliamo:

$$\mathcal{L}_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_\theta(x_j) = \frac{1}{12^n} \theta^{-5n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{j=1}^n x_j^2} \prod_{j=1}^n x_j^9$$

$$\Longrightarrow \log \mathcal{L}_\theta(x_1, \ldots x_n) =$$

$$= -n\log 12 - 5n\log\theta + 9\sum_{j=1}^n \log x_j - \frac{1}{\theta}\sum_{j=1}^n x_j^2$$

$$\Longrightarrow \partial_\theta \log \mathcal{L}_\theta(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{5n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{j=1}^n x_j^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Theta_n = \frac{1}{5n}\sum_{j=1}^n X_j^2$$

maximum: $\partial_\theta^2 \log \mathcal{L}_{\Theta_n}(\ldots) > 0$

b) $$\mathbb{E}_\theta(\Theta_n) = \mathbb{E}_\theta\left(\frac{1}{5n}\sum_{j=1}^n X_j^2\right) = \frac{1}{5n}\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta(X_j^2) =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^\infty x^2 \frac{1}{12\theta^5} x^9 e^{-x^2/\theta}\, dx \underset{y = \frac{x^2}{\theta}}{=} \theta \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{5!} y^5 e^{-y}\, dy}_{\text{integrale sulla densità di una } \Gamma(6,1)} = \theta$$

$\Longrightarrow$ lo stimatore è corretto

c) Sulla base della sostituzione fatta al punto precedente definiamo: $Y_j = \frac{X_j^2}{\theta}$

$$f_Y(y)\,dy = \frac{1}{4!} y^4 e^{-y}\,dy \implies Y_j = \frac{X_j^2}{\theta} \sim \Gamma(5,1)$$

$$\implies Z_j = 2\frac{X_j^2}{\theta} \sim \Gamma\left(5,\tfrac{1}{2}\right) = \chi^2(10)$$

$$\implies \sum_{j=1}^{n} Z_j = \frac{2}{\theta}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 = \frac{2}{\theta}5n\frac{1}{5n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2$$

$$= \frac{10n}{\theta}\Theta_n \sim \chi^2(10n)$$

$\implies$ Sia (A_-^α, A_+^α) un intervallo di confidenza al livello $1-\alpha$ per la distribuzione $\chi^2(10n)$ allora

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} Z_j \in (A_-^\alpha, A_+^\alpha)\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{10n}{\theta}\Theta_n \in (A_-^\alpha, A_+^\alpha)\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\theta \in \underbrace{\left(\frac{10n\Theta_n}{A_+^\alpha}, \frac{10n\Theta_n}{A_-^\alpha}\right)}_{\text{IC al livello } 1-\alpha \text{ per } \theta.}\right)$$

8. Sia dato un campione $X_1, \dots, X_n$ con comune funzione di ripartizione (sconosciuta) $F : \mathbb{R} \to [0,1]$. Sia $u \in \mathbb{R}$ e definiamo, per $i = 1, \dots, n$,

$$Y_i(u) = \mathbb{1}_{X_i \le u}$$

Il campione $Y_1(u), \dots, Y_n(u)$ ha legge Bernoulli di parametro $F(u) \in [0,1]$. Sia

$$\hat{F}_n(u) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i(u)$$

(a) $\hat{F}_n(u)$ è una stima non distorta di $F(u)$? Asintoticamente distorta?

(b) Calcolare il rischio quadratico (medio) $R(F(u), \hat{F}_n(u)) = \mathbb{E}_{F(u)}[(\hat{F}_n(u) - F(u))^2]$.

(c) La successione $\{\hat{F}_n(u)\}_n$ è consistente?

(d) Trovare un intervallo di fiducia al livello $1 - \alpha$, $0 < \alpha \ll 1$, per $F(u)$.

a) $\mathbb{E}_F(\hat{F}_n(u)) = \mathbb{E}_F\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(u)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_F\left(\mathbb{1}_{X_i \le u}\right)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_F(X_i \le u) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot F(u) = F(u)$

$\Longrightarrow$ lo stimatore è corretto (non distorto) e quindi asintoticamente corretto

b) $\mathbb{E}_F\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(u) - F(u)\right)^2\right) =$

$= \mathbb{E}_F\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(u)\right)^2\right) - 2F(u)\,\mathbb{E}_F\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j(u)\right) + F(u)^2$

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}_F\left(Y_i(u)Y_j(u)\right) - F(u)^2$

$= \underbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}_F(Y_i(u))\,\mathbb{E}_F(Y_j(u)) - F(u)^2}_{0} + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}(Y_j(u)^2) - \mathbb{E}(Y_j(u))^2}_{Var(Y_j(u)) = F(u)(1-F(u))}$

$= \frac{1}{n} F(u)(1-F(u))$

c) Siccome $R(F(v), \hat{F}_n(v)) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$$P_F\left(|\hat{F}_n(v) - F(v)|^2 \geq \varepsilon^2\right) \overset{(M)}{\leq} \frac{\mathbb{E}_F\left((\hat{F}_n(v) - F(v))^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{R(F(v), \hat{F}_n(v))}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\longrightarrow$ $\hat{F}_n(v)$ è consistente

d) Notiamo che $n\hat{F}_n(v)$ ha distribuzione binomiale con parametri $(n, F(v))$

Calcoliamo un intervallo di confidenza approssimativo

Per il CLT: $\hat{F}_n(v) \underset{n \gg 1}{\sim} N\left(F(v), \frac{F(v)(1-F(v))}{n}\right)$

$$\Longrightarrow \frac{\hat{F}_n(v) - F(v)}{\sqrt{F(v)(1-F(v))}} \sqrt{n} \sim N(0,1) \qquad \sigma_F = \sqrt{F(v)(1-F(v))}$$

Sia (z_-^α, z_+^α) un intervallo di conf. al livello $1-\alpha$ per $Z \sim N(0,1)$, allora

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{\hat{F}_n(v) - F(v)}{\sigma_F} \sqrt{n} \in (z_-^\alpha, z_+^\alpha)\right)$$

dipende da $F(v)$!

per $F \in (0,1)$

$$= \mathbb{P}\left(F(v) \in \left(\hat{F}_n(v) - \frac{1}{\sqrt{n}} z_+^\alpha \sigma_F, \hat{F}_n(v) + \frac{1}{\sqrt{n}} z_-^\alpha \sigma_F\right)\right)$$

$\sigma_F = \sqrt{F(1-F)} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$

$$\leq \mathbb{P}\left(F(v) \in \underbrace{\left(\hat{F}_n(v) - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{2} z_+^\alpha, \hat{F}_n(v) + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{2} z_-^\alpha\right)}_{\text{IC al livello } 1-\alpha \text{ per } F(v)}\right)$$

Alternativamente, notiamo che

$$\left(\frac{n}{2} - a_\alpha^{(n)}, \frac{n}{2} + a_\alpha^{(n)}\right)$$ è l'IC al livello $1-\alpha$

di $Bin\left(n, \frac{1}{2}\right)$, allora

$$\left(np - a_\alpha^{(n)}, np + a_\alpha^{(n)}\right)$$ contiene l'IC al

livello $1-\alpha$ di $Bin(n,p)$ $\forall p > 0$

Quindi abbiamo

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(|\hat{F}_n(v) - F(v)| \leq a_\alpha^{(n)}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(F(v) \in \left(\hat{F}_n(v) - a_\alpha^{(n)}, \hat{F}_n(v) + a_\alpha^{(n)}\right)\right)$$

Foglio di esercizi 10

Discussione soluzioni: 24.05.2022

* rappresenta esercizi prioritari. Si consiglia di provare gli esercizi sui test statistici dopo la lezione di Martedì 23.05, durante la quale sarà fatto un richiamo su questo argomento.

1. * Sia dato un campione $X_1, \dots, X_n$ con densità esponenziale di parametro $\lambda > 0$.
   (a) Trovare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\lambda}_n$ del parametro λ e $\hat{e}ta_n$ dei $h(\lambda) = \lambda^{-1}$.
   (b) Queste stime sono corrette? asintoticamente corrette?
   (c) La successione di stime $(\hat{\lambda}_n)_n$ è consistente?
   (d) Esaminare il test unilatero di ipotesi nulla $H_\theta : \lambda \leq 1$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \lambda > 1$ al livello α.
   (e) Esaminare il test di ipotesi nulla $H_\theta : \lambda = 2$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \lambda \neq 2$ al livello α.

2. * Sia dato un campione $X_1, \dots, X_n$ con gegge Normale con parametri $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.
   (a) Trovare un intervallo di confidenza a livello $1 - \alpha$ per il parametro μ assumendo di non conoscere σ^2.
   (b) Trovare un intervallo di confidenza a livello $1 - \alpha$ per il parametro σ^2 assumendo di conoscere μ.
   (c) Esaminare il test unilatero di ipotesi nulla $H_\theta : \mu \leq \mu_0$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$ al livello α assumendo di non conoscere σ^2.
   (d) Esaminare il test di ipotesi nulla $H_\theta : \mu = \mu_0$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0$ al livello α assumendo di non conoscere σ^2.
   (e) Esaminare il test di ipotesi nulla $H_\theta : \sigma^1 \leq \sigma_0^2$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \sigma^1 > \sigma_0^2$ al livello α assumendo di conoscere μ.

3. (Continua dal foglio precedente) Dato $n \geq 1$, sia $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione di densità
$$f_\theta(x) = \frac{1}{12\theta^5} x^9 e^{-x^2/\theta} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$
   dove $\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ rappresenta la funzione indicatrice sull'insieme $(0, \infty)$.
   (a) Determinare lo stimatore Θ_n di massima verosimiglianza di θ.
   (b) Formulare un test per l'ipotesi nulla $\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0$, ed ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$ al livello di significatività α.

4. (Continua dal foglio precedente) Dato $n \geq 1$, sia $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione di densità
$$f_\theta(x) = \theta \exp(x - \theta \exp(x)), \qquad \text{per } \theta > 0\,.$$
   (a) Determinare lo stimatore Θ_n di massima verosimiglianza di θ.
   (b) Formulare un test per l'ipotesi nulla $\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0$, ed ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$ al livello di significatività α.

5. Si consideri, per $a \in \mathbb{R}$ e $\theta > 0$ un campione $X_1, X_2, ..., X_n$ estratto da una popolazione di densità
$$f_{a,\theta}(x) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{1}{\theta}(x-a)} \mathbb{1}_{[a,\infty)}(x).$$
   (a) Determinare gli stimatori di massima verosimiglianza (A_n, Θ_n) dei parametri (a, θ).

(b) Per a costante, formulare un test unilatero con ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0, \qquad \mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$$

e livello $\alpha \in (0, 1)$.

(c) Stabilire se $(A_n)_{n\geq 2}$ è consistente.

(d) Stabilire se $(\Theta_n)_{n\geq 2}$ è consistente.

6. * Sia dato un campione $X_1, \ldots, X_n$ con gegge di Poisson con parametro $\lambda > 0$.

(a) Trovare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\lambda}_n$ del parametro λ.

(b) Questa stima è corretta? asintoticamente corretta?

(c) La successione di stime $(\hat{\lambda}_n)_n$ è consistente?

(d) Trovare un intervallo di confidenza a livello $1 - \alpha$ per il parametro λ.

(e) Esaminare il test unilatero di ipotesi nulla $H_\theta : \lambda \leq 1$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \lambda > 1$ al livello α.

(f) Esaminare il test di ipotesi nulla $H_\theta : \lambda = 2$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \lambda \neq 2$ al livello α.

<u>Richiamo</u>: $T \sim \exp(\lambda) \implies \alpha T \sim \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$

$g(t) = \alpha t \qquad f_{\alpha T}(s) = f_T(s) \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\lambda}{\alpha} e^{-\lambda \frac{s}{\alpha}} \sim \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$

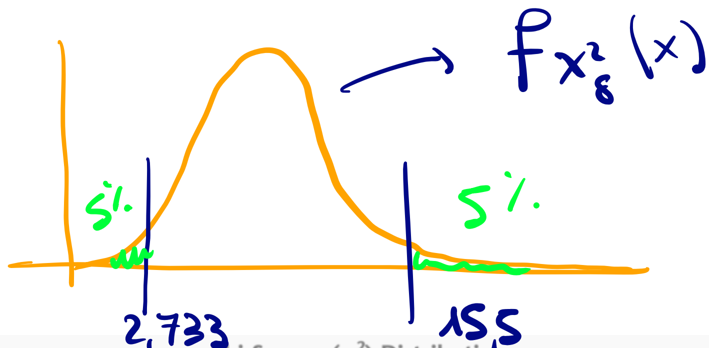
$\sum_{i=1}^{n} T_i = S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$

$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} \cdot \lambda e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0$

$$\alpha S_n = \alpha \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha T_i \sim Gamma\left(n, \frac{\lambda}{\alpha}\right)$$

$$Gamma(\nu, 2) = \chi^2_{2\nu}$$

Se $X_i \overset{iid}{\sim} N(0,1) \implies \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$



Chi-Square (χ^2) Distribution

Area to the Right of Critical Value

Degrees of Freedom	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	—	—	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

1. * Sia dato un campione $X_1, \dots, X_n$ con densità esponenziale di parametro $\lambda > 0$.

   (a) Trovare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\lambda}_n$ del parametro λ e $\hat{eta}_n$ dei $h(\lambda) = \lambda^{-1}$.

   (b) Queste stime sono corrette? asintoticamente corrette?

   (c) La successione di stime $(\hat{\lambda}_n)_n$ è consistente?

   (d) Esaminare il test unilatero di ipotesi nulla $H_\theta : \lambda \leq 1$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \lambda > 1$ al livello α.

   (e) Esaminare il test di ipotesi nulla $H_\theta : \lambda = 2$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \lambda \neq 2$ al livello α.

a) $$\mathcal{L}_\lambda(x_1, \dots x_n) = \prod_{j=1} f_\lambda(x_i) = \prod_{j=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{j=1} x_j}$$

$$\ell_\lambda(x_1, \dots x_n) = + n \log \lambda - \lambda \sum_i x_i$$

$$\partial_\lambda \ell_\lambda(x_1, \dots x_n) = + \frac{n}{\lambda} - \sum_i x_i \overset{!}{=} 0 \iff \hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum x_i}$$

Analogamente: $$\mathcal{L}_\eta(x_1, \dots x_n) = \eta^{-n} e^{-\eta^{-1} \sum_{j=1}^{n} x_j}$$

$$\partial_\eta \ell_\eta(x_1, \dots x_n) = -\frac{n}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} \sum_{j=1}^{n} x_j \iff \hat{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

b) $$\mathbb{E}(\hat{\eta}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(x_j) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \eta = \eta \Rightarrow \text{corretto}$$

$$\mathbb{E}(\hat{\lambda}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i X_i} \right) \overset{n=1}{=} \mathbb{E}\left(\frac{1}{X_1} \right) = \int_0^\infty \frac{1}{x} \lambda e^{-\lambda x} dx$$
$$= \infty \neq \lambda$$

$$\mathbb{E}(\hat{\lambda}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i X_i} \right) = n\, \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sum_i X_i} \right) = n \mathbb{E}'\left(\frac{1}{Y} \right)$$

$Y \sim Gamma(n, \lambda)$ $$= n \int_0^\infty \frac{1}{\cancel{y}} \cdot \frac{y^{n-2} \lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda y} dy$$

$$= \frac{n \lambda}{n-1} \int_0^\infty \frac{y^{n-2} \lambda^{n-1}}{(n-2)!} e^{-\lambda y} dy =$$

$$= \frac{n\lambda}{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \qquad f_Z \quad Z \sim Gamma(n-1,\lambda)$$

$\hat{\lambda}_n$ non è corretto ma è asintoticamente corretto.

c) La consistenza di $\hat{\lambda}_n$ segue dal teorema visto in classe:

$f_\lambda(x) = \lambda\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\, e^{\lambda(-x)}$ è un modello esponenziale con

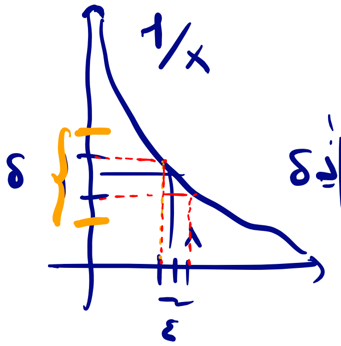
$c_\theta \; g(x) \; e^{\theta T(x)}$

$x \mapsto \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\, x^2 e^{-\lambda x}$ integrabile

$\Longrightarrow$ consistente

Alternativamente:

$$P(|\hat{\lambda}_n - \lambda| > \varepsilon) = P\left(\left|\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_i X_i} - \lambda\right| > \varepsilon\right)$$



$$\le P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_i X_i - \frac{1}{\lambda}\right| > \delta\right) \longrightarrow 0$$

$$\delta \doteq \left|\varepsilon \left(\frac{1}{x}\right)'\Big|_\lambda\right| = \varepsilon \frac{1}{\lambda^2}$$

$\longrightarrow \hat{\lambda}$ è consistente.

d) $H_0 : \lambda \le 1$

Consideriamo lo stimatore $\frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{n}\sum_i X_i \sim Gamma(n, \lambda n)$

$$\left[\sum_i X_i \sim Gamma(n,\lambda) \Longrightarrow \alpha \sum_i X_i \Big|_{\alpha=\frac{1}{n}} \sim Gamma\left(n, \frac{\lambda}{\alpha}\right)\Big|_{\alpha=\frac{1}{n}}\right]$$

"Standardizziamo" la VA $\frac{1}{n}\sum_i X_i$

Richiamo: $Gamma(n,2) = \chi^2_{2n}$

Vediamo che $\frac{\lambda n}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) \sim Gamma\left(n, \frac{\lambda n}{\frac{\lambda n}{2}}\right)$

$$= \chi^2_{2n}$$

Quantile $q_{2n,\alpha}$ al livello α

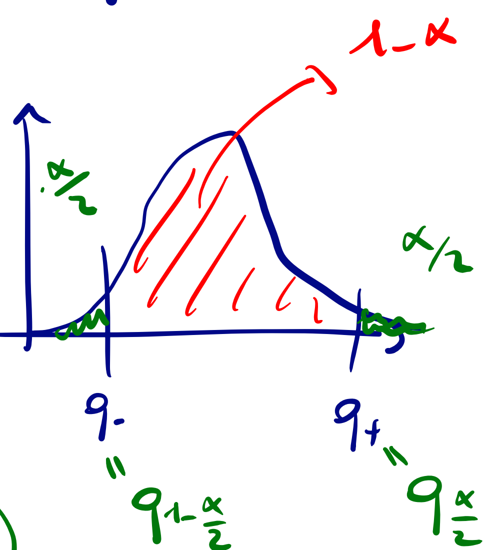
Superiamo il test se

$$\frac{\lambda n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) < q_{2n,\alpha}$$

Concretamente: superiamo il test se

$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) \le q_{2n,}$$

e) $H_0 : \lambda = 2$



Superiamo il test se

$$\frac{n\,\overset{\to\lambda}{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right)\in\left(q_{1-\frac{\alpha}{2}},\, q_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

In pratica $1-\alpha = 95\%$

$q_{2.5\%}$ si trova sulla tabella per χ^2_{2n}

e vale per $n = 5$

$$q_{2.5\%,\,2n=10} = 3.247$$
$$q_{97.5\%,\,2n=10} = 20.4$$

2. * Sia dato un campione $X_1, \dots, X_n$ con gegge Normale con parametri $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(a) Trovare un intervallo di confidenza a livello $1-\alpha$ per il parametro μ assumendo di non conoscere σ^2.

(b) Trovare un intervallo di confidenza a livello $1-\alpha$ per il parametro σ^2 assumendo di conoscere μ.

(c) Esaminare il test unilatero di ipotesi nulla $H_\theta : \mu \leq \mu_0$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$ al livello α assumendo di non conoscere σ^2.

(d) Esaminare il test di ipotesi nulla $H_\theta : \mu = \mu_0$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0$ al livello α assumendo di non conoscere σ^2.

(e) Esaminare il test di ipotesi nulla $H_\theta : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ al livello α assumendo di conoscere μ.

a) Sia $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X})^2$, $\quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$

allora $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$\Longrightarrow 1-\alpha = \mathbb{P}\left(T \in (t^-_{v,\alpha}, t^+_{v,\alpha})\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \in (t^-_{v,\alpha}, t^+_{v,\alpha})\right)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\mu \in \underbrace{\Big(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t^+_{v,\alpha}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t^-_{v,\alpha}\Big)}_{\text{IC al livello } 1-\alpha}\Big)$$

b) $\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{X_j - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$

Sia (χ^-_n, χ^+_n) un intervallo di confid. al livello $1-\alpha$ per la variabile Z_n con distribuzione $\chi^2(n)$, allora

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(Z_n \in (\chi^-_n, \chi^+_n)\right) = \mathbb{P}\Big(\frac{n-1}{\sigma^2} \underbrace{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu)^2}_{S^2} \in (\chi^-_n, \chi^+_n)\Big)$$

$$= \mathbb{P}\left(\sigma^2 \in \left(\frac{S^2}{\chi^+_n/(n-1)}, \frac{S^2}{\chi^-_n/(n-1)}\right)\right)$$

c) Come visto in classe, il modello gaussiano

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathcal{N}(\mu,\sigma^2))_\mu)$$

è a verosimiglianza crescente rispetto a $\bar{X}$

regione critica $C = \{\bar{X} > d_\alpha\}$

$$ST = \frac{\sqrt{n}}{S}\cdot(\bar{X}-\mu) \sim t(n-1) \qquad S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\bar{X})^2}$$

Troviamo d_α:

$$\alpha = P_{\mu_0}(\bar{X} > d_\alpha) = P_{\mu_0}\Big(\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X}-\mu_0)}_{T \sim t(n-1)} > \frac{\sqrt{n}}{S}(d_\alpha-\mu_0)\Big)$$

$$\iff \frac{\sqrt{n}}{S}(d_\alpha-\mu_0) = t_{\nu,1-\alpha} \iff d_\alpha = \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{\nu,1-\alpha}$$

d) Usando la connessione tra test bilateri e intervalli di fiducia abbiamo

$$C = \{\omega\in\Omega : \theta_0 \notin D(\omega)\} = \{\omega\in\Omega : \underbrace{|\bar{X}-\mu_0| \notin \left(\frac{S}{\sqrt{n}}t^-_{\nu,\alpha}, \frac{S}{\sqrt{n}}t^+_{\nu,\alpha}\right)}\}$$

Esempio: $|\bar{X}-\mu_0| > t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}}$ ← $(1-\frac{\alpha}{2})$ quantile di $t(\nu)$

Esplicitamente:

$$\alpha = P(|T| > t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}}) = P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= P\Big(\{\omega : \bar{X}(\omega) \in \underbrace{\left[\mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}}, \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}}\right]^c}_{\tilde{C}}\}\Big)$$

e) Modello statistico $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathcal{N}(\mu,\sigma^2))_{\sigma^2})$

per $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ abbiamo

$$\frac{L_{\sigma_2^2}(x_1 \dots x_n)}{L_{\sigma_1^2}(x_1 \dots x_n)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \cdot \exp\left(-\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2}_{T}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \exp\left(\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} T\right)$$

$\Longrightarrow$ funzione crescente di T.

$\longrightarrow$ regione critica $C = \{T > d_\alpha\}$

$$ST = \frac{T}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

X

troviamo d_α:

$$\alpha = \mathbb{P}_{\sigma_0^2}(T > d_\alpha) = \mathbb{P}_{\sigma_0^2}\left(\frac{T}{\sigma_0^2} > \frac{d_\alpha}{\sigma_0^2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d_\alpha}{\sigma_0^2} = \chi_{n,1-\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad d_\alpha = \sigma_0^2 \chi_{n,1-\alpha}$$

3. (Continua dal foglio precedente) Dato $n \geq 1$, sia $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione di densità

$$f_\theta(x) = \frac{1}{12\theta^5} x^9 e^{-x^2/\theta} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

dove $\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ rappresenta la funzione indicatrice sull'insieme $(0,\infty)$.

(a) Determinare lo stimatore Θ_n di massima verosimiglianza di θ.

(b) Formulare un test per l'ipotesi nulla $\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0$, ed ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$ al livello di significatività α.

a) $\Theta_n = \frac{1}{5n} \sum_{j=1}^n X_j^2$

b) Verifichiamo che per $\theta_1 < \theta_2$

$$\frac{L_{\theta_2}(x_1, \dots x_n)}{L_{\theta_1}(x_1, \dots x_n)} = \frac{\theta_1^5}{\theta_2^5} e^{-\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}\right)\sum_{j=1}^n x_j^2} = \frac{\theta_1^5}{\theta_2^5} e^{\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1 \theta_2} \sum_{j=1}^n x_j^2}$$

cresce strettamente in $T = \sum_{j=1}^n x_j^2$

$\longrightarrow$ regione critica $C_\alpha = \{T > d_\alpha\}$ per livello α.

dal foglio precedente abbiamo:

$$Z_j = 2\frac{X_j^2}{\theta} \sim \Gamma\left(5, \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \sum_{j=1}^n Z_j = \frac{2}{\theta} \sum_{j=1}^n X_j^2 = \frac{2}{\theta} T \sim \chi^2(10n)$$

$$\Longrightarrow \alpha = P_{\theta_0}(T > d_\alpha) = P_{\theta_0}\Big(\underbrace{\frac{2T}{\theta_0}}_{\sum_{j=1}^n Z_j \sim \chi^2(10n)} > \frac{2d_\alpha}{\theta_0}\Big)$$

$$\Longrightarrow \frac{2d_\alpha}{\theta_0} = r_{10n, 1-\alpha} \Longleftrightarrow d_\alpha = \frac{\theta_0}{2} r_{10n, 1-\alpha}.$$

4. (Continua dal foglio precedente) Dato $n \geq 1$, sia $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione di densità

$$f_\theta(x) = \theta \exp(x - \theta \exp(x)), \qquad \text{per } \theta > 0\,.$$

(a) Determinare lo stimatore Θ_n di massima verosimiglianza di θ.

(b) Formulare un test per l'ipotesi nulla $\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0$, ed ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$ al livello di significatività α.

a) dal foglio precedente: $\Theta_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n e^{x_j}\right)^{-1}$

b) per $\vartheta_2 > \vartheta_1$ consideriamo

$$\frac{L_{\vartheta_2}(x_1, \dots x_n)}{L_{\vartheta_1}(x_1, \dots x_n)} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \exp\left(-(\vartheta_2 - \vartheta_1)\sum_{j=1}^n \exp(x_j)\right)$$

$T = \left(\sum_{j=1}^n \exp(x_j)\right)^{-1}$

$$= \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \exp\left(-(\vartheta_2 - \vartheta_1)\frac{1}{T}\right)$$

$\Longrightarrow$ rapporto di verosimiglianza crescente in T.

$\longrightarrow$ regione critica $C_\alpha = \{T > d_\alpha\}$.

Consideriamo la VA standardizzata

$$S = \vartheta \sum_{j=1}^n \exp(x_j) \sim \Gamma(n,1) = \chi^2(2n)$$

$$\Longrightarrow \alpha = \mathbb{P}_{\vartheta_0}(T > d_\alpha) = \mathbb{P}_{\vartheta_0}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{T}\cdot\vartheta_0}_{S} < \tfrac{\vartheta_0}{d_\alpha}\Big)$$

α-quantile di $\chi^2(2n)$

$$\Longleftrightarrow \frac{\vartheta_0}{d_\alpha} = \chi^2_{2n,\alpha} \Longleftrightarrow d_\alpha = \frac{\vartheta_0}{\chi^2_{2n,\alpha}}$$

5. Si consideri, per $a \in \mathbb{R}$ e $\theta > 0$ un campione $X_1, X_2, ..., X_n$ estratto da una popolazione di densità

$$f_{a,\theta}(x) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{1}{\theta}(x-a)} \mathbb{1}_{[a,\infty)}(x).$$

(a) Determinare gli stimatori di massima verosimiglianza (A_n, Θ_n) dei parametri (a, θ).

(b) Per a costante, formulare un test unilatero con ipotesi

conosciuta

$$\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0, \qquad \mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$$

e livello $\alpha \in (0, 1)$.

(c) Stabilire se $(A_n)_{n \geq 2}$ è consistente.

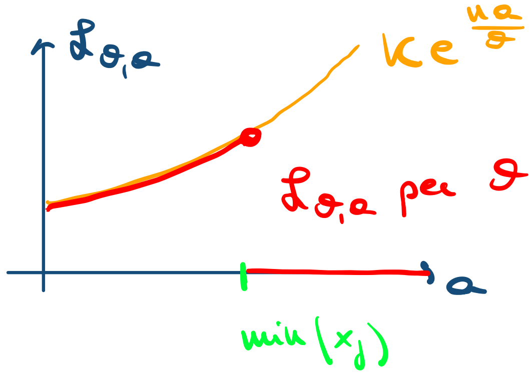
(d) Stabilire se $(\Theta_n)_{n \geq 2}$ è consistente.

a) $$\mathcal{L}_{a,\theta}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(x_j - a)} \mathbb{1}_{[a,\infty)}(x_j)$$

$$= \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) - na\right)} \underbrace{\prod_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{[a,\infty)}(x_j)}_{\mathbb{1}(a \leq \min x_j)}$$

$$= \underline{\frac{1}{\theta^n} \exp\left(-\frac{1}{\theta} \sum x_j + \frac{na}{\theta}\right)} \; \underline{\mathbb{1}(a \leq \min(x_j))}$$

$\Longrightarrow$ per θ fisso la funzione ha la forma



$\Longrightarrow$ massimo in $a = \min_j(x_j)$

$$\longrightarrow \ell_{\theta,\min(x_j)}(x_1 \dots x_n) = \log \mathcal{L}_{\theta, \min_j(x_j)} =$$

$$= -n \log \theta - \frac{1}{\theta} \sum x_j + \frac{n \min(x_j)}{\theta}$$

$\Longrightarrow$ minimizziamo in θ $\underset{\text{diff su } \theta}{\Longrightarrow}$ $\partial_\theta \ell_{\theta, \min x_j} = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_i x_j - \frac{1}{\theta^2} n \min(x_j) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \Theta_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \min_k x_k \right) \\ A_n = \min_k x_k \end{cases}$$

b) Verifichiamo il rapporto di verosimiglianza: $\theta_2 > \theta_1$

$$\frac{L_{\theta_2}(x_1 \ldots x_n)}{L_{\theta_1}(x_1, \ldots x_n)} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \cdot e^{-\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}\right) \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - a\right)}_{T}}$$

$$= \frac{\theta_1}{\theta_2} \exp\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1 \theta_2} T \right) \longrightarrow \text{strett cresc. in } T.$$

$\Longrightarrow$ regione critica è della forma

$$C_\alpha = \{ T > d_\alpha \}$$

Consideriamo la variabile standardizzata per $\theta = \theta_0$

$$\frac{T}{\theta_0} \sim \Gamma(n, 1) = \chi(2n) \sim S$$

$$\Longrightarrow \alpha = \mathbb{P}(S > x_{2n, 1-\alpha}) = \mathbb{P}(T > \underbrace{\theta_0 x_{2n,1-\alpha}}_{d_\alpha})$$

c) $$\mathbb{P}_{\theta,a}(|A_n - a| > \varepsilon) = \mathbb{P}(A_n > a+\varepsilon) =$$

$$= \mathbb{P}(\min_j X_j > a+\varepsilon) = \mathbb{P}(X_j > a+\varepsilon)^n$$

$$= \Big(1 - \underbrace{\int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(x-a)}\,dx}_{>0}\Big)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Longrightarrow$ consistente

d) $$\mathbb{P}_{\theta,a}(|\Theta_n - \theta| > \varepsilon) = \mathbb{P}_{\theta,a}\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (X_j - \min_k X_k) - \theta\Big| > \varepsilon\Big)$$

$$= \mathbb{P}_{\theta,a}\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (X_j - a) - \theta + a - \min_k X_k\Big| > \varepsilon\Big)$$

$$\leq \mathbb{P}_{\theta,a}\Big(\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum (X_j - a) - \theta\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \cup \Big\{|a - \min_k X_k| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\Big)$$

$$\leq \mathbb{P}_{\theta,a}\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \underbrace{(X_j - a)}_{Y_j \sim \mathcal{E}xp(\frac{1}{\theta})} - \underbrace{\theta}_{\mathbb{E}(Y_j)}\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) + \mathbb{P}_{\theta,a}\Big(|A_n - a| > \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}_{\theta,a}\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j - \mathbb{E}(X_j)\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ (legge grandi num.)}} + \underbrace{\mathbb{P}_{\theta,a}\Big(|A_n - a| > \frac{\varepsilon}{2}\Big)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{consistente}$$

6. * Sia dato un campione $X_1, \dots, X_n$ con gegge di Poisson con parametro $\lambda > 0$.

(a) Trovare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\lambda}_n$ del parametro λ.

(b) Questa stima è corretta? asintoticamente corretta?

(c) La successione di stime $(\hat{\lambda}_n)_n$ è consistente?

(d) Trovare un intervallo di confidenza a livello $1-\alpha$ per il parametro λ.

(e) Esaminare il test unilatero di ipotesi nulla $H_\theta : \lambda \leq 1$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \lambda > 1$ al livello α.

(f) Esaminare il test di ipotesi nulla $H_\theta : \lambda = 2$ e ipotesi alternativa $\mathcal{H}_1 : \lambda \neq 2$ al livello α.

a) $f_\theta(x_j) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^{x_j}}{x_j!} \Longrightarrow \mathcal{L}_\lambda(x_1 \dots x_n) = e^{-n\lambda} \dfrac{\lambda^{\sum_{j=1}^n x_j}}{\prod_{j=1}^n x_j!}$

$\Longrightarrow \ell_\lambda(x_1, \dots x_n) = \log(\mathcal{L}_\lambda(x_1 \dots x_n)) = -n\lambda + \log\lambda \cdot \sum_{j=1}^n x_j - \sum_{j=1}^n \log x_j!$

$\overset{\partial_\lambda = 0}{\Longrightarrow} \quad -n + \dfrac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n x_j = 0 \quad \Longleftarrow \quad \hat{\lambda} = \dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$

b) $\mathbb{E}_\lambda\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right) = \mathbb{E}_\lambda(X_j) = \lambda \Longrightarrow$ corretta e asint. corretta.

c) $\mathbb{P}_\lambda\left(|\hat{\lambda}(x_1, \dots x_n) - \lambda| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}_\lambda\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j - \mathbb{E}_\lambda(X_j)\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[LLN]{n \to \infty} 0$

$\Longrightarrow$ lo stimatore è consistente.

d) Approssimativamente $\quad \overline{X}_n \overset{n \gg 1}{\approx} \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right)$

$\Longrightarrow \quad \dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \approx Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\Longrightarrow$ Sia (z_α^-, z_α^+) un IC al livello $1-\alpha$ per Z

$1-\alpha = \mathbb{P}(Z \in (z_\alpha^-, z_\alpha^+)) = \mathbb{P}\left(\dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \in (z_\alpha^-, z_\alpha^+)\right)$ $\quad \lambda \approx \overline{X}_n$

$\simeq \mathbb{P}\left(\lambda \in \left(\overline{X}_n - z_\alpha^+ \sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}}, \overline{X}_n + z_\alpha^- \sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}}\right)\right)$

e) il rapporto di verosimiglianza per $\lambda_1 < \lambda_2$

$$\frac{L_{\lambda_2}(x_1 \dots x_n)}{L_{\lambda_1}(x_1 \dots x_n)} = e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\sum_{j=1}^n x_j}$$

è crescente rispetto a $T = \sum_{j=1}^n x_j$

$\Longrightarrow$ regione critica $C_\alpha = \{T > d_\alpha\}$ al livello α

asintoticamente $\frac{1}{n}\sum_j X_j \underset{n \gg 1}{\overset{\text{approx}}{\sim}} N\left(\lambda, \sqrt{\frac{\lambda}{n}}\right)$

$$\Longrightarrow \alpha = \mathbb{P}_{\lambda_0}\left(\sum_{j=1}^n X_j > d_\alpha\right) = \mathbb{P}_{\lambda_0}\left(\underbrace{\frac{T - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}}}_{\simeq Z \sim N(0,1)} > \frac{d_\alpha - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{d_\alpha - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} = q_{1-\alpha} \iff d_\alpha = \lambda_0 + \sqrt{\frac{\lambda_0}{n}} \cdot q_{1-\alpha}$$

f) Siccome sotto H_0 $\quad \frac{\overline{X} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} \approx Z \sim N(0,1)$

$$\alpha = \mathbb{P}_{\lambda_0}\left(|Z| > q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \simeq \mathbb{P}_{\lambda_0}\left(\left|\frac{\overline{X} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}}\right| > q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\lambda_0}\left(\overline{X} \in \underbrace{\left(\lambda_0 - \sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}\, q_{1-\frac{\alpha}{2}}, \lambda_0 + \sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}\, q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)}_{\tilde{C}}\right)$$

$$\Longrightarrow C_\alpha = \{\omega \in \Omega : \overline{X} \in \tilde{C}\}$$