DIAGONALIZZABILITÀ E TRIANGOLABILITÀ

Titolo nota 07/09/2021

ENDOMORFISMI DIAGONALIZZABILI

Sia $f \in End(V)$ $spec(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. I seguenti fatti sono equivalenti

1) $\exists B$ base di V formata da autovettori di f
2) $\exists B$ base di V t.c. $M_B^B(f) = D$ è una matrice diagonale
3) $V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(f)$

dim.

$1 \Rightarrow 2$ ovvio

$1 \Rightarrow 3$ Per hp $\exists B$ base di autovettori per f.

Suddivido $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ con $B_i \subset V_{\lambda_i}$

$\Rightarrow V = \mathrm{Span}(B_1) \cup \dots \cup \mathrm{Span}(B_k) \subseteq V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

Ma $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \subseteq V \Rightarrow$ Tesi

valgono entrambe $\Rightarrow =$.

$3 \Rightarrow 1$ Se B_i è base di $V_{\lambda_i} \Rightarrow \underbrace{B_1 \cup \dots \cup B_k}_{B}$ è base di autovettori di $V \Rightarrow$ Tesi

Se f verifica 1 e quindi tutte tra queste proprietà $\Rightarrow f$ si dice diagonalizzabile $D(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ è diagonalizzabile}\}$

La proprietà di essere o no diagonalizzabile è un invariante per coniugio.

Se $g \sim f \Rightarrow \exists h \in Gl(V)$ t.c. $g = h \circ f \circ h^{-1}$. Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base di autovettori per f $\Rightarrow D = \{h(v_1), \dots, h(v_n)\}$ è base di autovettori per g

$D' = M^D_D(g) = M^B_B(f) = D$ per DS equiv. $D' = D =$ mat. diagonal.

CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITA'

Un endomorfismo f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$

1) $p_f(t) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - t)^{m_a(\lambda_i)}$ cioè $p_f(t)$ è completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[t]$

cioè $m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_k) = n$.

2) $\forall\ \lambda$ autovalore di f $\dim(V_\lambda(f)) = m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$

dim

$\Rightarrow$ Se f è diagonalizzabile $\Rightarrow$ $\exists$ B base di autovettori di f t.c.

$M^B_B(f) = D =$ diagonale $\quad D = M^B_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k I_{d_k} \end{pmatrix}$

1) con $d_1 + \dots + d_k = n$

Allora $p_f(t) = p_D(t) = (\lambda_1 - t)^{d_1} \cdots (\lambda_k - t)^{d_k} = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - t)^{d_i}$

2) $m_a(\lambda_i) = d_i$ e B contiene d_i autovettori relativi a λ_i.

$m_g(\lambda_i) = \dim(V_{\lambda_i}) \geq d_i = m_a(\lambda_i)$ ma vale che $m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$

$\Rightarrow$ $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$

$\Leftarrow$ So che $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \subseteq V$

Se $\dim \geq$ ho finito perché in tal caso f è diagonalizz.

$$\dim(V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim(V_{\lambda_k}) =$$

$$= m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_k) \underset{\text{per hp}}{=} m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_k) \underset{\text{per hp}}{=} n$$

$$\Rightarrow V \subseteq V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \Rightarrow$$

e cioè f è diagonalizzabile.

NOTA

Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso la condizione $\sum_i m_a(\lambda_i) = n$ è sempre verificata cioè $p_f(t)$ è sempre fatt. complet. in $\mathbb{K}[t]$.

ENDOMORFISMI TRIANGOLABILI

Bandiera

Sia $\dim V = n$ V $\mathbb{K}$-sp. v.

Si chiama bandiera per V ogni famiglia $\{V_i\}$ di ssp di V t.c.

1) $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n$

2) $\forall i$ $\dim(V_i) = i$.

Ogni base B di V porta una bandiera di ssp. $V_i = \text{Span}(v_1, \dots, v_i)$
e viceversa $\forall$ bandiera per V $\exists$ B base che la induce

Prendo $v_i \in V_i$ ma $v_i \notin V_{i-1}$

$$\text{Span}(v_1) \subset \text{Span}(v_1, v_2) \subset \dots \subset \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$$

BANDIERA F-INVARIANTE

$f \in End(V)$ B base di V B si dice basa a bandiera per f se i ssp. della bandiera indotta da B sono f-invarianti cioè $\forall i$ $f(Span(v_1, \dots, v_i)) \subseteq Span(v_1, \dots, v_i)$

I seguenti fatti sono equivalenti

$\forall f \in End(V)$ $\forall B$ base di V. f è triangolabile se soddisfa $1 = 2$.

1) B triangola f cioè $T = M^B_B(f)$ è trian. superiore

2) La bandiera indotta da B è f-invariante

$1 \Rightarrow 2.$ $T = M_B^B(f)$ è triang. sup. $T = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$

Io so che $\forall B$ base di V $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ porta una bandiera di ssp. $V_i = \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_i)$ $\forall i = 1 \dots n$

Devo dim. che la bandiera è f-invariante

$f(v_1) = \mu_1 v_1 \in \operatorname{Span}(v_1)$ e cioè $f(v_1) \in V_1 = \operatorname{Span}(v_1)$

$f(v_2) = * v_1 + \mu_2 v_2 \in \operatorname{Span}(v_1, v_2)$ $f(v_2) \in V_2 = \operatorname{Span}(v_1, v_2)$

$\vdots$

$f(v_n) = * v_1 + \dots + * v_{n-1} + \mu_n v_n \in \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_n)$

e cioè $f(\operatorname{Span}(v_1, \dots, v_n)) \subset \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_n)$

Dunque è f-invariante

$2 \Rightarrow 1$ Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V t.c $\overbrace{F(B)}^{\text{bandiera di } B}$ è f-invariant

Allora $f(v_1) \in V_1 \Rightarrow f(v_1) = \mu_1 v_1$

$f(v_2) \in V_2 \Rightarrow f(v_2) = * v_1 + \mu_2 v_2$.

$\vdots$

Itero e ottengo $M^B_B(f) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \in T^+$

CRITERIO DI TRIANGOLABILITA'

$f \in End(V)$ f si dice triangolabile $\iff$ $p_f(t)$ è comp. fatt. in $\mathbb{K}[t]$.

e cioè $\iff$ $\sum_{i=1} m_a(\lambda_i) = n = \dim V$

dim

$\Rightarrow$ Se f è triangolabile $\Rightarrow \exists B$ base di V t.c. $M_B^B(f) = T \in T^+$

cioè $T = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} \mu_1 - t & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n - t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_f(t) = p_T(t) = \det(T - \mu I) = (\mu_1 - t) \dots (\mu_n - t) = \prod_{i=1}^{k} (\mu_i - t)^{m_i}$

$\Leftarrow$ Per induzione su $n = \dim V$

P.B $n=1$. $\forall M \in (1,1,\mathbb{K}) \in T^+$

P.I Per hp $\exists\ \mu_1$ autovalore per f perché $p_f(t)$ è complet. fatt. in $\mathbb{K}[t]$ e dunque ha almeno una radice e cioè ha almeno un autovalore

Sia v_1 e' autovettore relativo a μ_1

$B_1 = \{v_1\}$ estendo B_1 a $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ base di V

Chiamo $V_1 = \text{Span}(v_1)$ e $W = \text{Span}\{v_2, \dots v_n\}$

Allora $V = V_1 \oplus W$

$$M_B^B(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} \mu_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad C \in M(n-1, n-1, \mathbb{K})$$

Sia $\pi_{V_1} : V \longrightarrow V_1$ $\quad \pi_W : V \longrightarrow W$ indotte da $\oplus$ $V = V_1 \oplus W$.

Sia $g = (\pi_W \circ f|_W)$ $\quad f|_W : W \longrightarrow V$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f|_W"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & V \arrow[r, "\pi_W"] & W \end{tikzcd} \Rightarrow g \in End(W)$$

Osservo che $D = \{v_2, \dots, v_n\}$ è base di W

e $M_D^D(g) = C$

Ora $\underbrace{p_f(t)}_{\text{fatt. per hp}} = (\mu_1 - t)\, \underbrace{p_C(t)}_{\text{fatt. per hp induttiva.}}$

$\Rightarrow$

Essendo $p_C(t)$ comp. fatt in $\mathbb{K}[t]$ per hp induttiva $\exists$ D base di W $D = \{v_2, \dots, v_n\}$ che triangolarizza C e che è a bandiera per g

$\Rightarrow$ $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è base a bandiera per f

$$v_1 \xrightarrow{f} f(v_1), \qquad \underbrace{v_2, \dots, v_n} \xrightarrow{f} f(v_2), \dots, f(v_n)$$

$$\underbrace{f(v_1) = \mu_1 v_1}_{\in \mathrm{Span}(v_1)}, \qquad \underbrace{f(v_2), \dots, f(v_n)} \in \mathrm{Span}(v_2, \dots, v_n) \text{ per hp. induttiva}$$

$\Rightarrow$ $f(v_i) \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ $\forall i$. $\Rightarrow$ B è a bandiera f-invariante

$\Rightarrow$ f è triangolabile

OSSERVAZIONI

- Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso $\forall f \in End(V)$ $f \in \mathcal{T}(V)$ cioè ogni end. è triangolabile $End(V) = \mathcal{T}(V)$

- La prop. di essere triangolabile è invariante per coniugio perchè dipende solo da $p_f(t)$

Gli invarianti noti fin ora non bastano ancora.

Sia $J(\lambda, n) \in T^+$ t.c. sulla Δ ha tutti λ,

sotto Δ ha tutti 0

immediatamente sopra Δ ha tutti 1

sopra ha 0

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J(\lambda, 2) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad J(\lambda, 3) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$n = 4$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J(0,2) & 0 \\ \hline 0 & J(0,2) \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} J(0,3) & 0 \\ \hline 0 & J(0,1) \end{array}\right)$$

$\mathrm{rnk}\, A = \mathrm{rnk}\, B = 2$

$p_A(t) = p_B(t) = t^4$

$\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{spec}(B) = \{0\}$ $\qquad$ $\dim V_0(A) = \dim \mathrm{Ker}(A) = \dim V_0(B)$

Non le riesco a distinguere ☹ Ma non sono simili!

Corollario

$A \sim B \iff \forall n \geq 1 \quad A^n \sim B^n$

$\Rightarrow B = PAP^{-1} \quad \Rightarrow \quad B^n = \underbrace{(PAP^{-1}) \cdots (PAP^{-1})}_{n} = PA^nP^n$

ritornando a prima...

$J(0,n)$

$E_1 \to 0$

$E_2 \to E_1$

$E_3 \to E_2$

$A^2 = 0$

$E_1 \to 0$

$E_2 \to E_1 \to 0$

$B^2 \neq 0$

$E_1 \to 0$

$E_2 \to E_1 \to 0$

$E_3 \to E_2 \to E_1 \neq 0.$

$\Rightarrow A \not\sim B$

OSSERVAZIONI

$f, g \in D(V)$ $\quad g \sim f \iff p_g(t) = p_f(t)$

Se $f, g \notin D(V)$ non vale $\Leftarrow$.