IDEALI DI UN ENDOMORFISMO

Titolo nota 08/09/2021

Calcolare il polinomio nell'endomorfismo

Sia $f \in End(V)$ $\quad \forall p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k \in \mathbb{K}[t]$

Calcoliamo il polinomio nell'endomorfismo $\quad f^0 = id$

$p(f) = a_0 f^0 + \dots + a_1 f^1 + \dots + a_k f^k \in End(V)$ e $\forall k \geq 0 \quad f^{k+1} = f \circ f^k$

Fissato f definiamo $\phi : \mathbb{K}[t] \longrightarrow End(V)$

$$p(t) \longmapsto p(f) \qquad \phi(p(t)) = p(f)$$

- ϕ è omomorfismo di anelli $\begin{cases} (p+q)(f) = p(f) + q(f) \\ (p \cdot q)(f) = p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f) \end{cases}$
- $Im(\phi)$ è un sottoanello commutativo di $End(V)$

- $I(f) = \mathrm{Ker}(\phi) = \{p(t) \in \mathbb{K}[t] \text{ t.c. } \underbrace{p(f)}_{\in End(V)} = 0 \text{ cioè } \phi(p(t)) = 0\}$
  ↳ ideale

$I \subseteq \mathbb{K}[t]$ $\quad I$ è ideale se: 1) $\forall p(t), q(t) \in I$, $p(t) + q(t) \in I$
2) $\forall p(t) \in I \ \forall s(t) \in \mathbb{K}[t]$, $p(t) \cdot s(t) \in I$

- $\mathbb{K}[t]$ è un PID $\Rightarrow \forall J$ ideale $\exists p_0(t) \in J$ t.c. $J = (p_0(t)) =$
  $= \{a(t) p_0(t) : a(t) \in \mathbb{K}[t]\}$

Se $J \neq \{0\}$ $\exists!$ $q_J(t)$ polinomio monico di grado minimo ≥ 1 t.c. $J = (q_J(t))$ ed è detto polinomio minimo.

Gli ideali somo non banali

$\forall f \in End(V) \quad I(f) \neq \{0\}$

Dato che $\dim(End(V)) = n^2$ fisso $m > n^2$. $\Rightarrow f^0, \dots, f^m$ sono linearm. dipendenti $\Rightarrow \exists\ a_0 f^0 + \dots + a_m f^m = 0 \in End(V)$ t.c. $\exists\ a_j \neq 0 \Rightarrow p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \in I(f)$ ed $\exists\ a_j \neq 0$

$\Rightarrow I(f) \neq \{0\}$

Il polinomio minimo e quindi gli ideali sono invarianti per coniugio

Se $g \sim f \Rightarrow I(f) = I(g) \Rightarrow \overbrace{q_f(t) = q_g(t)}^{\text{pol. minimi}}$

dim

se $g \sim f \Rightarrow \exists\, h \in GL(V)$ t.c. $g = h \circ f \circ h^{-1} \Rightarrow \forall k \geq 0$

$$g^k = (h \circ f \circ h^{-1})^k = h \circ f^k \circ h^{-1}$$

$\forall p(t) \quad p(g) = h \circ p(f) \circ h^{-1}$ ma h è iso $\Rightarrow p(f) = 0 \Leftrightarrow p(g) = 0$

Teorema di Hamilton - Cayley.

$\forall f \in End(V)$ $p_f(t) \in I(f)$ e cioè $q_f(t) \mid p_f(t)$

dim

caso f triangolabile

Dato che f è triangolabile, sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V a bandiera f-invariante $\Rightarrow T = M^B_B(f)$ è triangolare superiore.

Siano $\lambda_j = t_{jj}$ cioè λ_j sono tutti gli elt. sulla Δ di T

$\Rightarrow p_f(t) = (\lambda_1 - t) \dots (\lambda_n - t)$ $\qquad p_f(f) = \underbrace{(\lambda_1 Id_V - f) \circ \dots \circ (\lambda_n Id_V - f)}_{\text{COMMUTANO}}$

perché l'Im è un sottoanello comm. di End(V) ← COMMUTANO

$$P_f(f)(v_1) = (\lambda_2 \,\mathrm{id}_V - f) \circ \dots \circ (\lambda_n \,\mathrm{id}_V - f) \circ \underbrace{(\lambda_1 \,\mathrm{id}_V - f)(v_1)}_{\lambda_1 v_1 - \underbrace{f(v_1)}_{\lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1 = 0}} = 0$$

$$P_f(f)(v_2) = (\lambda_3 \,\mathrm{id}_V - f) \circ \dots \circ (\lambda_n \,\mathrm{id}_V - f) \circ (\lambda_1 \,\mathrm{id}_V - f) \circ \underbrace{(\lambda_2 \,\mathrm{id}_V - f)(v_2)}_{\lambda_2 v_2 - f(v_2) = \lambda_2 v_2 - (\lambda_2 v_2 + \lambda v_1)} = 0$$

$$= (\lambda_1 \,\mathrm{id}_V - f)(\lambda v_1) \circ \underbrace{\lambda_2 v_2 - \lambda_2 v_2}_{= 0.}$$

Itero ...

Volevo far vedere che se prendo il pol. caratteristico e lo calcolo in f ottengo l'end. nullo perchè $p(f) \in I(f)$ e cioè $\forall v_J \quad P_f(f)(v_J) = 0$

caso generale:

$p_f(t)$ non è complet. fatt. in $\mathbb{K}[t]$

Passo alle coordinate e fisso una base B di V così che $V \xleftrightarrow{} \mathbb{K}^n$

$A = M_B^B(f)$ $\qquad p_f(t) = p_A(t)$. Basta dim che $p_A(A) = 0 \in M(n, \mathbb{K})$

Estendo $\mathbb{K}$ a $\mathbb{F}$ $\quad M(n, \mathbb{K}) \subset M(n, \mathbb{F})$

$p_A(t)$ è fatt. in $\mathbb{F}[t]$ $\qquad p_A(A) = 0 \in M(n, \mathbb{F})$

$$\begin{array}{c} p_A(A) \\ \cap \\ M(n, \mathbb{K}) \end{array}$$

L'autovalore è radice del polinomio

Se $\lambda \in Spec(f) \Rightarrow \forall p(t) \in I(f) \quad p(\lambda) = 0$

Sia $v \neq 0$ v autovettore relativo a λ $\quad f(v) = \lambda v. \Rightarrow$

$$0 = p(f)(v) = p(f(v)) = p(\lambda v) = p(\lambda)(v) = \underbrace{(p(\lambda))}_{\neq 0} v = 0 \Rightarrow p(\lambda) = 0$$

$p \in I(f) \Rightarrow p(f) = 0 \Rightarrow p(f)(v) = 0$

Ogni polinomio di $I(f)$ (pol. caratt. e pol. min in particolare) si annulla su ogni autovalore $\Rightarrow$ segue che:

COROLLARIO

Se f è triangolabile e quindi $p_f(t)$ è complet. fatt. in $\mathbb{K}[t]$

siano $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ autovalori di f. Allora

$$p_f(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{m_i} \Rightarrow q_f(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{r_i}$$

con $1 \leq r_i \leq m_i \quad \forall i.$

con r_i = molteplicità alg. di λ come radice di $q_f(t)$

INVARIANTI NOTI FIN ORA

1) POLINOMIO CARATTERISTICO -->

- DETERMINANTE
- SPETTRO
- TRACCIA
- MOLTEPLICITA' ALGEBRICA

2)DIMENSIONE DEGLI AUTOSPAZI= MOLTEPLICITA' GEOMETRICA --> DIMENSIONE DELL'IMMAGINE = RANGO

3) POLINOMIO MINIMO--> IDEALE

Non bastano ancora

TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE PRIMARIA

Sia $p(t) \in I(f)$ $\quad p(t) = a(t) \cdot b(t)$ e $MCD(a(t), b(t)) = 1$. Allora

1. $V = Ker(a(f)) \oplus Ker(b(f))$

2. $Ker(a(f))$ e $Ker(b(f))$ sono f-invarianti

3. Se $g \sim f \Rightarrow \begin{cases} \dim(Ker(a(f))) = \dim(Ker(a(g))) \\ \dim(Ker(b(f))) = \dim(Ker(b(g))) \end{cases}$

dim

1) Per Bezout $\exists\ m(t)$ e $n(t)$ t.c. $1 = m(t)\cdot a(t) + n(t)\cdot b(t)$

Calcolo su f $\quad 1(f) = id_V = m(f)\, a(f) + n(f)\cdot b(f)$

Calcolo su v $\quad \underbrace{(id_V)(v)}_{v} = \underbrace{(m(f)\circ a(f))(v)}_{\in \operatorname{Ker}(b(f))} + \underbrace{(n(f)\circ b(f))(v)}_{\in \operatorname{Ker}(a(f))}$

infatti $\quad b(f) \circ (m(f) \circ a(f))(v) = (b(f) \circ m(f) \circ a(f))(v)$

$$= \Big(m(f) \circ \big(\underbrace{b(f)\circ a(f)}_{p(f)}\big)\Big)(v) = (m(f) \circ \underbrace{p(f)}_{=0})(v) = 0$$

$=0$ perché $p(f) \in I(f)$

$\Rightarrow p(f)(v) = 0$

- Analogamente $(n(f) \circ b(f))(v) \in \operatorname{Ker}(a(f))$ infatti:

$$a(f) \circ (n(f) \circ b(f))(v) = (a(f) \circ n(f) \circ b(f))(v) =$$

$$= (m(f) \circ \underbrace{(a(f) \circ b(f))}_{p(f)=0 \text{ perchè } p(f) \in I(f) \Rightarrow p(f)(v)=0})(v) = 0.$$

Quindi ho che $V = \operatorname{Ker}(a(f)) + \operatorname{Ker}(b(f))$

- Dim. ora che $+$ è $\oplus$.

Se $v \in \operatorname{Ker}(a(f)) \cap \operatorname{Ker}(b(f)) \Rightarrow$

$$v = \underbrace{\big(m(f) \circ a(f)\big)(v)}_{=0 \text{ perché } v \in \ker(a(f))} + \underbrace{\big(n(f) \circ b(f)\big)(v)}_{=0 \text{ perché } v \in \ker(b(f))} = 0 + 0 = 0$$

La somma è diretta

2) • se $a(f)(v) = 0$ $\quad a(f)\big(f(v)\big) = f \circ \big(a(f)(v)\big) = f \circ (0) = 0$

• se $b(f)(v) = 0$ $\quad b(f)\big(f(v)\big) = f \circ \big(b(f)(v)\big) = f \circ (0) = 0$

Sono f-invarianti.

3) Se $g \sim f \Rightarrow \exists\, h \in GL(V)$ t.c. $g = h \circ f \circ h^{-1}$

$a(g) = h \circ a(f) \circ h^{-1}$ e $b(g) = h \circ b(f) \circ h^{-1}$

$\Rightarrow$ • $a(g) \sim a(f) \Rightarrow \dim(a(g)) = \dim(a(f)) \Rightarrow$

$\dim(\ker(a(f))) = \dim(\ker(a(g)))$

• $b(g) \sim b(f) \Rightarrow \dim(b(g)) = \dim(b(f)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(\ker(b(f))) = \dim(\ker(b(g)))$

Teorema di decomposizione multipla.

$f \in End(V)$ triangolabile $\qquad Spec(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ p_f(t) = \prod_{\lambda \in Spec(f)} (\lambda - t)^{m_\lambda} \\ &\bullet\ q_f(t) = \prod_{\lambda \in Spec(f)} (\lambda - t)^{r_\lambda} \end{aligned}\right\}$$

con $1 \le r_\lambda \le m_\lambda \quad \forall \lambda \in Spec(f)$

ogni fattore è coprimo con qualsiasi altro fattore.

Allora ho 2 decomposizioni a priori diverse.

- $V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(f)} Ker(\lambda id_V - f)^{m_\lambda}$
- $V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(f)} Ker(\lambda id_V - f)^{r_\lambda}$

Ogni addendo è f-invariante

e $\forall \lambda$ autovalore di f $\quad \forall s \geq 1 \quad \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id}_V - f)^s$ è detto

autospazio generalizzato.

Iterare un endomorfismo.

Sia $h \in End(V)$ $\quad \forall k \geq 1$ 1 $Ker(h^k) \subseteq Ker(h^{k+1})$

2 Se $Ker(h^k) = Ker(h^{k+1}) \Rightarrow Ker(h^{k+1}) = Ker(h^{k+2})$

dim

1 Se $h^k(v) = 0 \Rightarrow h^{k+1}(v) = h(h^k(v)) = h(0) = 0$

2 Per 1 $Ker(h^{k+1}) \subseteq Ker(h^{k+2})$ dimostriamo $\supseteq$

Sia $v \in Ker(h^{k+2}) \Rightarrow h^{k+2}(v) = h^{k+1}(h(v)) = 0$ e cioè

$h(v) \in Ker(h^{k+1})$. Ma per hp $Ker(h^k) = Ker(h^{k+1}) \Rightarrow$

$h(v) \in Ker(h^k) \Rightarrow h^k(h(v)) = h^{k+1}(v) = 0 \Rightarrow v \in Ker\, h^{k+1}$

Osservazione

Sia $h = (\lambda\, id_V - f) \Rightarrow$

$$\ker(\lambda\, id_V - f) \subseteq \dots \subseteq \ker(\lambda\, id_V - f)^{r_\lambda} \subseteq \dots \subseteq \ker(\lambda\, id_V - f)^{m_\lambda}$$

$$\bigoplus_{\lambda \in Spec(f)} \ker(\lambda\, id_V - f)^{r_\lambda} = V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(f)} \ker(\lambda\, id_V - f)^{m_\lambda}$$

Allora $\ker(\lambda\, id_V - f)^{r_\lambda} = \ker(\lambda\, id_V - f)^{m_\lambda} \quad \forall \lambda \in Spec(f)$

Quindi le due decomposizione primarie coincidono