# ALGORITMO DI GAUSS



Algoritmo di Gauss rispetto alle righe

$G_R : M(m, n, \mathbb{K}) \longrightarrow M(m, n, \mathbb{K})$

$A \in M(m, n, \mathbb{K}) \longrightarrow \hat{A}_R = \left( \ 0 \ \right)$ forma a scalini.

$A_0 \to A_1 \dashrightarrow \ldots \ldots \dashrightarrow A_k = \hat{A}_R$.

Le modifiche si ottengono attraverso 3 tipi di operazioni

I Tipo $\quad R_i \longleftrightarrow R_j$

II Tipo $\quad R_i \longrightarrow \lambda R_i \quad \lambda \neq 0 \quad \lambda \in \mathbb{K}$.

III Tipo $\quad R_i \longrightarrow R_i + \lambda R_j \quad \lambda \neq 0 \quad \lambda \in \mathbb{K} \quad i \neq j$

$A_0 = \left( 0 \middle| \overset{J}{*} \right)$ Passo 1 $\longrightarrow$ Ispeziono la matrice

se $A_0 = 0$ $A_0 = \hat{A}_R$.

se $A_0 \neq 0$ sia $A^J$ la prima colonna $\neq 0$

$A_0 = \left( 0 \middle| \begin{matrix} \vdots & \\ \lambda & * \\ \vdots & \end{matrix} \right) i$

$\hookrightarrow$ sia $\lambda \neq 0$ il $1^a$ coeff di $A^J$ con $\lambda \neq 0$.

t.c. $\lambda$ si trovi nella i-esima riga

$A_1 = \left( 0 \middle| \begin{matrix} \lambda & * \cdots * \\ * & \\ \vdots & \end{matrix} \right)$ Passo 2 $\longrightarrow R_1 \longleftrightarrow R_i$ porto $\lambda$ nella prima riga

Passo 3 $\longrightarrow R_1 \longrightarrow \lambda^{-1} R_1$

$A_2 = \left( 0 \middle| \begin{matrix} 1 & * \\ * & * \end{matrix} \right)$

Passo 4 $\longrightarrow$ Sia $\mu$ il 1° coeff $\neq 0$ sotto 1 nella $A^J$ e nella riga $k$.

$R_k \longrightarrow R_k - \mu . R_1$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & J & \end{array} \\ A_2 = & \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 1 & * \\ & 0 & \\ & 0 & \\ & \mu & \cdots \\ & * & \end{array} \right) \end{array} k$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & J & \end{array} \\ A_3 = & \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 1 & \\ & 0 & * \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ & * & \end{array} \right) \end{array}$$

Passo 5 $\rightarrow$ faccio operazioni di III tipo per far comparire tutti 0 sotto l'1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & J+1 & \end{array} \\ A_4 = & \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & * & \text{—} & * \\ & 0 & * & \text{—} & * \\ & \vdots & & & \\ & 0 & & & \end{array} \right) \end{array}$$

Passo 6 $\rightarrow$ passo alla colonna successiva.

Termino quando $A_K$ ha una forma a scalini

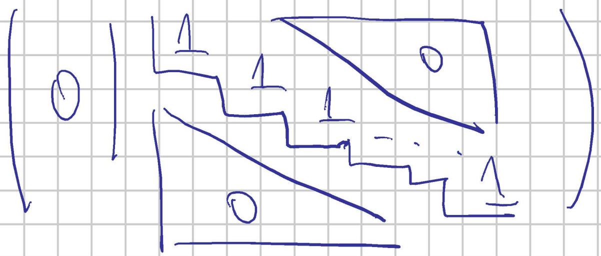
$$A_K = \left( 0 \,\middle|\, \begin{array}{cccc} 1 & * & \cdots & * \\ & 1 & & * \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{array} \right) = \hat{A}_R$$

Proprietà:

- $\hat{A}_R$ può avere righe nulle solo in basso $\hat{A}_R = \left( 0 \,\middle|\, \begin{array}{ccc} 1 & & * \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \\ \hline & 0 & \end{array} \right)$
- sotto il primo elt≠0 di ciascuna riga ci sono solo zeri
- Il 1° elt≠0 di ciascuna riga si chiama pivot.
- Man mano che procedo il pivot è sempre più a dx

## Algoritmo di Gauss completo

$$\hat{A}_R \longrightarrow \tilde{A}_R = $$



$\downarrow$ $\overline{\text{III}}$ TIPO.

## ALGORITMO DI GAUSS RISPETTO ALLE COLONNE

$$A \longrightarrow A^T \xrightarrow{\text{GR}} \longrightarrow \hat{A}^T_R \longrightarrow \left(\hat{A}^T_R\right)^t = \hat{A}_C$$

$$\tilde{A}^T_R \longrightarrow \left(\tilde{A}^T_R\right)^t = \tilde{A}_C$$

Proprietà

$\text{Span}(R(A)) = \text{Span}(R(\hat{A}_R)) \Rightarrow$ dimensioni sono uguali

$A = (A_1, \dots A_i, \dots A_j, \dots A_m)$

I TIPO $\quad R_i \longleftrightarrow R_j \qquad \hat{A}_R = (A_1, \dots, A_j, \dots A_i, \dots A_m)$

$\text{Span}(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots A_m) = \text{Span}(A_1, \dots, A_j, \dots A_i, \dots, A_m)$

e così per le altre operazioni.

Quindi $\dim \text{Span}(R(A)) = \dim \text{Span}(R(\hat{A}_R))$

$\mathrm{Span}(\mathcal{C}(A)) = \mathrm{Span}(\mathcal{C}(\hat{A}_c))$ e quindi anche le dim.

$\Rightarrow \mathrm{rnk}(A) = \mathrm{rnk}(\hat{A}_c)$

$AX = 0$ è equivalente a $\hat{A}_c X = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(\hat{A}_c)$

$$\Rightarrow n = \dim \mathrm{Ker}(A) + \underbrace{\dim \mathrm{Im}(A)}_{= \mathrm{rnk}(A)}$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$n = \dim \mathrm{Ker}(\hat{A}_c) + \underbrace{\dim \mathrm{Im}(\hat{A}_c)}_{= \mathrm{rnk}(\hat{A}_c)}$$

$\Rightarrow \mathrm{rnk}\, A = \mathrm{rnk}\, \hat{A}_c$

Le righe / colonne mom nulle di $\hat{A}_R$ / $\hat{A}_C$ sono lin. indip.

Se $\hat{A}_R$ ha r righe non nulle $\Rightarrow \{R_1, \dots, R_r\}$ sono una base di $Span(RC\hat{A}_R)$

generano perchè le altre righe sono nulle

lin. indip. $\alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_r R_r = 0$

$\alpha_1 = 0$ perche' $R_1$ è l'unica riga ad avere un el. ≠ nella colonna $A^1$

$\alpha_2 = 0$ perche $\alpha_1 = 0$ e $R_2$ è l'unica riga ad avere un el ≠ 0 nella colonna $A^2$ e così via.

segue che $\operatorname{rnk} A = \operatorname{rnk} \hat{A}_C = \#$pivot di $\hat{A}_C$

$\#$pivot di $\hat{A}_R$ = righe non nulle di $A$

$\#$pivot di $\hat{A}_R = \#$pivot di $\hat{A}_C$

- Io so che $\operatorname{rnk} A = \operatorname{rnk} A^T$

$$\#\text{pivot } \hat{A}_R = \dim(\operatorname{Span}(R(\hat{A}_R))) = \dim(\operatorname{Span}(R(A))) =$$

$$= \dim(\operatorname{Span}(C(A^t))) = \operatorname{rnk}(A^T) = \operatorname{rnk}(A) = \dim(\operatorname{Span}(C(A))) =$$

$$= \dim(\operatorname{Span}(C(\hat{A}_C))) = \#\text{pivot di } \hat{A}_C$$

Risolvere un sistema lineare

$AX = D \quad A \in M(m, n, \mathbb{K}) \quad X \in \mathbb{K}^n = M(1, n, \mathbb{K}) \quad D \in \mathbb{K}^m$

1) Se $D = 0$ il sistema è lineare omogeneo
2) Se $D \neq 0$ il sistema è lineare non omogeneo.

1) Se $D = 0$ $\quad 0$ è sempre solut. $\quad AX = 0 \quad Ker = \{soluzioni\}$

2) $\exists X$ sol. t.c. $D \in Im(A)$?

$\exists X$ sol. $\Leftrightarrow x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = D \Leftrightarrow D \in Span(C(A))$

## Teorema di Rouché - Capelli.

Considero $AX = D$ e $M = (A|D)$ = mat. completa del sistema

$\exists$ sol. di $AX = D \iff \operatorname{rnk} A = \operatorname{rnk} M$.

$\Rightarrow$ Se $D$ è soluz $\Rightarrow \exists X \in \mathbb{K}^n$ t.c. $x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = D$

$\Rightarrow \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n) = \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n, D)$

$\Rightarrow \operatorname{rnk} A = \operatorname{rnk} M$

$\Leftarrow$ Se $AX \neq D$ non ha sol. Allora

$\operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n) \subset \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n, D) \Rightarrow$

$\operatorname{rnk} A < \operatorname{rnk} M$.

Nel caso in cui ci siamo le soluz. le voglio calcolare.

$$M = (A \mid D) \xrightarrow{G\hat{R}} (\tilde{A}_R \mid \tilde{D}_R) = \tilde{M}_R$$

$$AX = D \qquad \tilde{A}_R X = \tilde{D}_R$$

I due sistemi sono equivalenti e quindi hanno lo stesso insieme di soluzioni perché le 3 operazioni non alterano l'insieme delle soluzioni

$\boxed{\text{Dim di rnk } A = \text{rnk } A^T}$

$AX = 0$ $\qquad \{Sol\} = \ker A$ $\qquad A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$X \longrightarrow AX$$

$$n = \dim \ker A + \underbrace{\dim \operatorname{Im} A}_{= \operatorname{rnk} A} \qquad \dim \ker A = n - \operatorname{rnk} A$$

$$\operatorname{rnk} A = \dim(\operatorname{Span}(\mathcal{C}(A))) = \#\text{pivot di } \hat{A}_C =$$

$$= \text{pivot di } \hat{A}_R = \dim \operatorname{Span}(\mathcal{R}(A)) = \dim \operatorname{Span}(\mathcal{C}(A^T)) = \operatorname{rnk} A^T$$

## Definizione di matrice elementare

Sia $E \in M(m, K)$ $E$ è elementare di un certo tipo se si ottiene applicando a $I_m$ un'operazione elementare di quel tipo

$m = 2$ $\quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

I TIPO $\quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

II TIPO $\quad E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

III TIPO $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Sia $A \in M(m, n, K)$ $\quad A \xrightarrow{op.} A'$ $\quad$ sia $E$ la corrisp. matrice elementare $\Rightarrow A' = E \cdot A$

- Ogni $E$ elementare è invertibile $\Rightarrow E \in GL(n, \mathbb{K})$ e l'inversa $E^{-1}$ è elementare dello stesso tipo

$$E \xrightarrow{op} I_m$$
$$\downarrow E^{-1}$$

$$E^{-1} \cdot E = I_m.$$

## Algoritmo per il calcolo dell'inversa.

Prendo $A \in M(m, \mathbb{K})$ $\quad$ $A$ è invertibile?

$$A = A_0 \xrightarrow{GR} A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \hat{A}_R$$

Dato che $A$ è quadrata quando considero $\hat{A}_R$ ho 2 possibilità:

1) $\text{rnk}\, \hat{A}_R = m \rightarrow$ matrice triang. sup.

2) $\text{rnk}\, \tilde{A}_R < m \rightarrow$ sulla diagonale ha qualche 0.

A è invertibile $\Leftrightarrow \text{rnk}(\hat{A}_R) = m$

Supponiamo che A sia invertibile e applico l'algoritmo di Gauss Completo $\hat{A}_R \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_m$

Osservo che $A = A_0 \xrightarrow[E_1]{} A_1 \xrightarrow[E_2]{} \dots \xrightarrow[E_k]{} \hat{A}_R \xrightarrow[E_{k+1}]{} \dots \xrightarrow[E_n]{} \tilde{A}_R \xrightarrow[E_{n+1}]{} I_m$

$\overbrace{(E_h \dots\dots\dots E_1)}^{A^{-1}} A = I$

Ogni $A \in GL(n,\mathbb{K})$ è prodotto di matrici elementari

## A. G e DS-EQUIVALENZA

Noi sappiamo che se $A \in M(m,n,\mathbb{K})$ ha rango $r \leq \min(m,n) \Rightarrow$
$\exists\, P \in GL(n,\mathbb{K})$ e $Q \in GL(m,\mathbb{K})$ t.c. $QAP = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Esplicitiamo P e Q.

$$A_0 = A \xrightarrow{G_R} \tilde{A}_R \xrightarrow{\quad G_C \quad} \widetilde{\left(\tilde{A}_R\right)}_C = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A}_R = \underbrace{(E_h \cdots E_1)}_{\substack{\| \\ Q}} A$$

prodotto di matrici elementari sulle righe $m \times m$

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \widetilde{QA}P = \tilde{A}_R P = \tilde{A}_R \overbrace{\underbrace{(F^1, \dots, F^s)}}^{P} = (E_h \cdots E_1) A (F^1, \dots F^s)$$

prodotto di matrici elementari colonne $n \times n$.

## Sistemi lineari rivisitati.

$AX = D \quad M = (A|D) \xrightarrow[\text{op. righe}]{} M' = (A'|D')$ e cioè $\exists$ $E$ elem sulle righe $\Rightarrow$ invertibile t.c.

$M' = (A' | D') = (EA | ED)$ e il sistema lin. associato è $EAX = ED$

L'insieme delle sol. non varia e risolverlo con Gauss significa trovare $Q$ invertibile t.c. $(QA | QD) = (\tilde{A}_R | \tilde{D}_R)$

Il sistema $\tilde{A}_R X = \tilde{D}_R$ è facile da risolvere