DETERMINANTE

Titolo nota 04/09/2021

determinante caso 2x2

Sia $A \in M(2, \mathbb{K})$ A è invertibile cioè $A \in GL(2, \mathbb{K}) \iff$

$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- caso 1 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ le righe sono dipendenti $\Rightarrow$ A è non invertibile.

- caso 2: $a_{11} = 0$ e $a_{21} \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xleftrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{G\hat{R}} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{pmatrix}$

A è invertibile $\iff a_{12} \neq 0$

- caso 3 $\quad a_{11} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xleftrightarrow[R_1 \to a_{11}^{-1} R_1]{\widehat{G_K}} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} a_{11}^{-1} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_2 - a_{21} R_1]{\widehat{G_K}} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} a_{11}^{-1} \\ 0 & a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

A è invertibile $\iff$

$$a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}} \neq 0$$

$$a_{22} a_{11} - a_{21} a_{12} \neq 0$$

Quindi $A \in M(2, \mathbb{K})$ e' invertibile

$\iff a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$

Chiamo $\det_2 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

Proprietà assiomatiche di det_2

1) det_2 è bilineare rispetto alle colonne
2) Se A ha 2 colonne uguali allora $det_2(A) = det_2(X, X) = 0$
3) $det_2(I_2) = 1$

Proprietà derivate.

1) $det_2(X, Y) = -det_2(Y, X)$

$0 = det_2(X+Y, X+Y) = \cancel{det_2(X, X)} + det_2(X, Y) + det_2(Y, X) + \cancel{det_2(Y, Y)}$

$= det_2(X, Y) + det_2(Y, X)$

Unicita' di $\det_2$ Sia D una funzione che verifica le 3 p. assiom.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \bar{E}^1 + a_{21} \bar{E}^2 + a_{12} \bar{E}^1 + a_{22} \bar{E}^2$$

$$D(A) = a_{11} a_{22} D(\bar{E}^1, \bar{E}^2) + a_{21} a_{12} D(\bar{E}^2, \bar{E}^1) =$$

$$= a_{11} a_{22} \underbrace{D(\bar{E}^1, \bar{E}^2)}_{=1} - a_{12} a_{21} \underbrace{D(\bar{E}^1, \bar{E}^2)}_{=1} =$$

$$\Rightarrow D = \det_2$$

Formula di Binet

$$\det(BA) = \det(B) \cdot \det(A) \qquad \forall A, B \in M(2, \mathbb{K})$$

Proposizione

A e' invertibile $\iff \det_2(A) \neq 0 \qquad A \in M(2, \mathbb{K})$

$\Rightarrow$ A invertibile $\Rightarrow \exists\ A^{-1} \in GL(2, \mathbb{K})$ t.c. $AA^{-1} = I_2$

$1 = \det(I_2) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A) \neq 0$

e $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

$\Leftarrow$ Se A non è invertibile $\Rightarrow A = (X, Y) = (X, \mu X)$ cioè ee

Colonne non sono lin. indip $\Rightarrow$

$$\det(A) = \det(X, \mu X) = \mu \det(X, X) = 0$$

INVARIANZA DEL DET. PER MATRICI SIMILI

Se $B \sim A \Rightarrow \det(B) = \det(A)$

$B = PAP^{-1} \Rightarrow \det(B) = \det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1})$

$$= \det(\underbrace{PP^{-1}}_{Id})\det(A) = \det(A)$$

Cose extra

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ sia D_λ una funzione che verifica le prime 2 proprietà assiomatiche

la terza propr. assiomatica è sostituita da $D_\lambda(I_2) = \lambda$

$D_\lambda = \lambda \det \qquad \det = D_1$.

$\Lambda^2 = \{ \phi : M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K} \mid \phi$ soddisfa le prime 2 p. ass $\}$

Λ^2 è ssp. v. di dim $= 1$ e il det è una base

equiv

$\lambda^2 = \{ \phi \in Bil(V \times V, \mathbb{K}) : \forall v \in V \quad \phi(v, v) = 0 \}$.

Sia $\phi \in \Lambda^2$ t.c. $\phi(I_n) = \lambda$

$$\phi(A) = \sum_{\theta \in S_n} a_{\theta(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\theta(n),n}\, \phi(E^{\theta(1)}, \ldots, E^{\theta(n)}) =$$

$$= \sum (-1)^{p(\theta)} a_{\theta(1),1} \cdots a_{\theta(n),n}\, \phi(I_n) = \lambda D(A)$$

e poiché vale $\forall A \in M(n, \mathbb{K}) \Rightarrow \forall \phi \in \Lambda^2 \quad \phi = \lambda D$

Nel caso 2x2 il det è invariante come il rango per coniugio

Determinante $n \times n$

$D : M(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ è un determinante se

1) è multilineare rispetto alle colonne
2) Se $A \in M(n, \mathbb{K})$ ha due colonne adiacenti uguali allora $D(A) = 0$

   $D(\dots, X, X, \dots) = 0$
3) $D(I_n) = 1$

Proprietăți derivate.

1) $D(\ldots x, y, \ldots) = -D(\ldots y, x, \ldots)$

$$0 = D(\ldots x+y, x+y, \ldots) = \cancel{D(\ldots x, x, \ldots)} + \cancel{D(\ldots y, y, \ldots)} +$$
$$+ D(\ldots x, y, \ldots) + D(\ldots y, x, \ldots)$$

2) $D(\ldots x, \ldots, x) = 0$

$$D(\ldots x, \ldots, x) = (-1)^{i} D(\ldots x, x, \ldots) = 0$$

3) $D(\ldots x, \ldots, y, \ldots) = -D(\ldots y, \ldots x, \ldots)$

Faccio i scambi $D(\ldots x, \ldots y, \ldots) \rightsquigarrow D(\ldots x y, \ldots)$

" " $D(\ldots y, x, \ldots) \rightsquigarrow D(\ldots y, \ldots, x, \ldots)$

In totale ho fatto $2i + 1$ scambi

Unicità ⇝ Leibiniz.

Ammetto l'esistenza

$\sigma(I_n) = (E^{\sigma(1)}, \dots, E^{\sigma(n)})$ cioè la matrice che si ottiene da I_n permutando le sue colonne secondo σ.

$D(\sigma(I_n)) = (-1)^{p(\sigma)}$

Data $A \in M(n, \mathbb{K})$ Calcolo $D(A)$

1) Scrivo ogni colonna come comb lineare di $(E^1, \dots, E^n)$

$a_{11}E^1 + a_{21}E^2 + \dots + a_{n1}E^n, \dots, a_{1n}E^1 + a_{2n}E^2 + \dots + a_{nn}E^n$

2) sviluppo usando la multilinearità e trascuro i termini con

due colonne uguali perché mi danno contributo nullo.

$$D(A) = \sum_{\theta \in S_n} a_{\theta(1),1} \cdots a_{\theta(n),n} \, D(\theta(I_n)) = \sum_{\theta \in S_n} (-1)^{p(\theta)} a_{\theta(1),1} \cdots a_{\theta(n),n}$$

Per dim. l'esistenza verifico che $D(A)$ rispetta le 3 prop. assiomat.

Determinante esistenza La place

P.B. Pongo $D_1(a) = a$

$(n \Rightarrow n+1)$

P.I Fisso un indice di riga $i \in \{1, \dots n+1\}$

$$D_{n+1}(A) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \cdot a_{ij} \cdot D_n(A_{ij})$$

dove $A_{ij} \in M(n-1, n-1, \mathbb{K})$ ed è la matrice che si ottiene cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna

Dim. che una tale funzione esiste e che quindi rispetta le 3 proprietà assiomatiche del determinante

1 Multilinearità rispetto alle colonne

Linearità rispetto alla K-esima colonna cioè

$\forall j$ il termine $(-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$ non dipende da K.

- caso 1 $\rightarrow$ $K = j$

$a_{ij} = a_{iK}$ è fissato $\Rightarrow$ non dipende da K.

$(-1)^{i+j} = (-1)^{i+K}$ è costante

$D_{n-1}(A_{ij}) = D_{n-1}(A_{iK})$ non dipende da K perché lo ho eliminato la A^K e quindi non varia al variare di K.

L'addendo $(-1)^{i+K} a_{iK} D_{n-1}(A_{iK})$ è una f. lineare della K-colonna

- caso $K \neq J$ $\quad (-1)^{i+J} a_{i,J}$ è costante e non dipende da K.

$D_{n-1}(A_{iJ})$ per hp induttiva è multilineare rispetto alle colonne e dipende da $n-1$ componenti della K-esima colonna che a loro wolta dipendono linearmente da A^K

Ma la composizione di app. lineari è lineare.

$\pi : A^K \longrightarrow A^K_{iJ}$ è lineare.

2) Sia $A = (\dots X, X, \dots)$ $\quad X = A^k = A^{k+1}$

$\Rightarrow a_{i,k} = a_{i,k+1}$ e $A_{i,k} = A_{i,k+1}$

Tesi: $\det(A) = \det(\dots X, X, \dots) = 0$

$$D(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} D_{n-1}(A_{1,j}) = 0$$

- caso 1 $\quad j \neq k, k+1$ anche in $A_{1,j}$ ci sono 2 colonne adiac. uguali $\Rightarrow D_{n-1}(A_{1,j}) = 0$
- caso 2 $\quad j = k = k+1$ $\quad a_{1,k} D_{n-1}(A_{1,k}) = a_{1,k+1} D_{n-1}(A_{1,k+1})$

$$D(A) = (-1)^{1+k} a_{1,k} D_{n-1}(A_{1,k}) + (-1)^{1+k+1} a_{1,k+1} D_{n-1}(A_{1,k+1}) = 0$$

3) $D(I_n) = 1$

$$D(I_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\, D_{n-1}(A_{i,j})$$

$$\forall i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D(I_n) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{(-1)^{i+i}}^{1}\, \overbrace{a_{i,i}}^{1}\, \overbrace{D_{n-i}(A_{i,i})}^{1 \text{ per hp. ind}} = 1$$

Proprietà del determinante

(1) Se A = (aij) è una matrice diagonale (triangolare inferiore, triangolare superiore) --> det(A) = prodotto degli elementi sulla diagonale. In particolare det(A) diverso da 0 se e solo se 0 non
compare sulla diagonale.

(2) Una matrice quadrata `e invertibile se e solo se det(A) diverso da 0.

(3) Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora il sistema di equazioni lineari omogene Ax = 0 ammette soluzioni non banali se e solo se det(A) = 0.

(4) det(BA) = det(B) det(A).

(5) Se A `e invertibile, det(A−1) = (det(A))−1.

(6) det(A) = det(AT) .

$\det(A) = \det(A^t)$

- In S_n $\sigma \to \sigma^{-1}$ è una trasformazione di S_n 1
- $p(\sigma) = p(\sigma^{-1})$
- se $A = (a_{i,j}) \Rightarrow A^T = (a_{j,i}) = (b_{i,j}) = B$

$$\det(A^T) = \det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{p(\sigma)} b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{p(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{p(\sigma^{-1})} a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n}$$

$$= \det(A)$$

Formula di Cramer e calcolo dell' inversa

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$ $\det(A) \neq 0$

Studio il sistema $AX = B$ Sia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ una soluzione

Allora $B = x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n$

Considero la matrice $M_j = (A^1, \ldots, \underset{\uparrow A^j}{B}, \ldots A^n)$ dove A^j è sostituita da B

$\det(M_j) = \det(A^1, \ldots, B, \ldots A^n) = \det(A^1, \ldots, x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n, \ldots, A^n)$

$= \det(A^1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i A^i, \ldots A^n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \det(A^1, \ldots, A^i, \ldots A^n) =$

$= x_j \det(A)$ perché $i = j$

Se $i \neq j \Rightarrow (A^1, \dots A^i_j, \dots A^n)$ ha 2 colonne uguali

$\Rightarrow \det(A^1, \dots A^i_j, \dots A^n) = 0$ ma $\det(A) \neq 0$ per hp.

$$x_j = \frac{\det(M_j)}{\det(A)} \qquad \det(M_j) = x_j \det(A)$$

I

Se A è invertibile Allora $[B]_{ij} = (-1)^{i+j} \dfrac{\det(A_{ji})}{\det(A)}$

è l'inversa di A.

dim

Poiché A è invertibile mi basta mostrare che $AB = I$

$$[AB]_{hk} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{hi} [B]_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} [A]_{hi} \frac{\det(A_{ki})}{\det(A)}$$

se $h = k \Rightarrow [AB]_{hh} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} [A]_{hi} \frac{\det(A_{hi})}{\det(A)} = \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1.$

se $h \neq k \Rightarrow [AB]_{hk} = 0$ perchè il numeratore è lo sviluppo secondo la colonna k-esima di una matrice ottenuta da A sostituendo ad A^k la colonna A^h $\Rightarrow$ ha 2 colonne uguali

$\Rightarrow$ tesi

$AX = B$ $\qquad X = A^{-1}B$ è l'unica soluzione.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow x_j = [A^{-1}B]_{j1} = \sum_{i=1}^{n} [A^{-1}]_{ij} [B]_{i1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ij})}{\det A} [B]_{i1} = \frac{\det(B(j))}{\det(A)}$$

Mancano la dim. della formula di Binet e il significato geometrico del det. in $\mathbb{R}^2$.