SPAZIO DUALE - ANNLLATORE E BIDUALE

Titolo nota 02/09/2021

definizione di spazio duale

- Sia V un $\mathbb{K}$-sp. vettoriale. definisco $V^* = Hom(V, \mathbb{K})$ dove $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ che ha la base canonica $\mathcal{C} = \{1\}$
- gli elementi di V^* si chiamano funzionali lineari.

Proposizione 1.

Se $\dim V = n \Rightarrow \dim V^* = n$.

<u>dim</u>

$V^* = Hom(V, \mathbb{K}) \cong Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) = M(1, n, \mathbb{K})$

$\Rightarrow Im V^* = \dim M(1, n, \mathbb{K}) = n$

$\forall B$ base di V

$f_B : V^* = Hom(V, \mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} M(1, n, \mathbb{K}) = Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$

$\phi \xrightarrow{\sim} M_1^B(\phi)$

f_B è isom.

BASE DUALE

Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V. Allora $B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ è la base duale ed è definita in questo modo:

$$\boxed{v_j^*(v_i) = \delta_{j,i}}$$

dove $\delta_{ji} = 0$ se $i \neq j$

$\delta_{ji} = 1$ se $i = j$

Quindi $\tau_B : V \longrightarrow V^*$

$v_i \longrightarrow v_i^*$ cioè $\tau_B(v_i) = v_i^*$

τ_B è un'isomorfismo ma non è canonico perché dipende dalla scelta della base

Caso particolare $V = \mathbb{K}^n$

Base canonica di $\mathbb{K}^n$ $C = \{E^1, \dots, E^n\}$.

$$V^* = (\mathbb{K}^n)^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) = M(1, n, \mathbb{K})$$

Allora $C^* = \{(E^1)^T, \dots, (E^n)^T\}$ $\tau_{can} : \mathbb{K}^n \longrightarrow M(1,n,\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n)^*$

$$\tau_{can} : \mathbb{K}^n \longrightarrow M(1,n,\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n)^*$$
$$X \longrightarrow X^T$$

è $f_B : V^* \longrightarrow M(1,n,\mathbb{K})$

$\phi \longrightarrow M_1^B(\phi)$

quindi vale che

$$f_B(v_j^*) = E_j^T$$

PROPOSIZIONE 2.

La base duale è una base dello spazio duale.

dim.

1) Mostriamo che i funzionali sono lin. indipendenti.

Se $a_1 v_1^* + \ldots + a_n v_n^* = 0$ = funzionale nullo che manda a 0 gli elt. di una base.

$\forall j \quad (a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^*)(v_j) = (a_j v_j^*)(v_j) = a_j = 0$

$a_j((v_j^*)(v_j)) = a_j \cdot 1 \qquad \delta_{j,j} = 1$

$\Rightarrow$ i funz. sono lin. indip.

2) I funzionali generano perchè sono n.

$B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ è una base di V^* come voluto

APPLICAZIONE TRASPOSTA

- funtore controvariante $f: X \to Y$ $\quad$ $F(f): F(Y) \to F(X)$ è funtore controvariante
- Sia $f: V \to W$ definiamo $f^t: W^* \longrightarrow V^*$

dove $\forall \phi \in W^*$ $f^t(\phi) = \phi \circ f$ $\quad$ $\phi \longmapsto \phi \circ f$

NOTA! $\to$ $\phi \in W^* = \mathrm{Hom}(W, \mathbb{K})$ $\quad$ $\phi: W \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\phi \circ f = f^t(\phi)"'] & W \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

$\phi \circ f : V \longrightarrow \mathbb{K}$

$\phi \circ f \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) = V^*$

f^t è lineare

Siano ϕ e $\varphi \in W^*$ allora $f^t(\phi + \varphi) = (\phi + \varphi) \circ f = \phi \circ f + \varphi \circ f =$
$= f^t(\phi) + f^t(\varphi)$

Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ $\quad \phi \in W^*$ allora $f^t(\lambda\phi) = (\lambda\phi) \circ f = \lambda(\phi \circ f) =$
$\lambda f^t(\phi)$

proprietà: 1) $(g \circ f)^t = f^t \circ g^t$

$(g \circ f)^t(\phi) = \phi \circ (g \circ f) = (\phi \circ g) \circ f = (f^t \circ g^t)(\phi)$

2) $\forall V \quad (\mathrm{id}_V)^t = \mathrm{id}_{V^*}$

Annullatore

Sia W ssp di V $\quad \dim V = n \quad$ $Ann(W) = \{ \phi \in V^* \mid \forall w \in W \ \phi(w) = 0 \}$

$Ann(W)$ è ssp di V^* e $\dim Ann(W) = \dim V - \dim W$.

dim

- Il funzionale identicamente nullo, annulla tutti i vettori di V quindi anche quelli di W.
- $\forall \psi, \varphi \in Ann(W)$ e $\forall w \in W$ vale che $\psi(w) = \varphi(w) = 0$

  $(\psi + \varphi)(w) = \psi(w) + \varphi(w) = 0 + 0 = 0$
- $\forall \varphi \in Ann(w) \quad \forall w \in W, \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \varphi(\lambda w) = \lambda \varphi(w) = \lambda 0 = 0$

Sia $\dim V = n$ $\dim W = k$ con $n \geq k$

$T = \{w_1, \dots, w_k\}$ base di W

$\downarrow$ estendo

B base di V $B = \{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots v_s\}$ con $k+s=n$

Considero $B^* = \{w_1^*, \dots, w_k^*, v_1^*, \dots v_s^*\}$

Affermo che $A = \{v_1^*, \dots, v_s^*\}$ è base di $\mathrm{Ann}(W)$.

- indip. lineare $A \subset B^*$ che è una base, quindi formata dai vettori lin. indip $\Rightarrow$ ogni sottoinsieme di un insieme formato da vettori lin. indipendenti è a sua volta un insieme di vett. lin. indip $\Rightarrow$ $A = \{v_1^*, \dots, v_s^*\}$ è formato da vett. lin. indip

- A genera.

$\forall \phi \in Ann(W)$ e poiché B^* è base di U^* vale che ϕ è comb lin. di B^*

$$\phi = a_1 v_1^* + \dots + a_s v_s^* + b_1 w_1^* + \dots + b_k w_k^*$$

Ma $\phi \in Ann(W) \Rightarrow \forall w_i \in W \quad \phi(w_i) = 0 \quad \forall i = 1 \dots k.$

$$\Rightarrow \phi(w_i) = (a_1 v_1^* + \dots + a_s v_s^* + b_1 w_1^* + \dots + b_k w_k^*)(w_i)$$

$$= b_i = 0 \quad \text{cioè} \quad \phi = a_1 v_1^* + \dots + a_s v_s^*$$

$$\Rightarrow \dim(Ann(W)) = \underset{n}{\underset{\shortparallel}{\dim V}} - \underset{k}{\underset{\shortparallel}{\dim W}} = s.$$

$\operatorname{rnk} A = \operatorname{rnk} A^T$

$\dim V = n \quad \dim W = m. \quad f \in \operatorname{Hom}(V, W) \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^t.$

$f^t : W^* \to V^*$

$\dim W^* = \dim W = \dim(\operatorname{Im} f^t) + \dim(\operatorname{Ker} f^t)$

$\operatorname{Ker} f^t = \{ \phi \in W^* \mid \phi \circ f = 0 \} = \operatorname{Ann}(\operatorname{Im} f)$

$\Rightarrow \dim W^* = \dim W = \dim(\operatorname{Im} f^t) + \dim(\operatorname{Ann}(\operatorname{Im} f))$

$= \cancel{\dim W} = \dim(\operatorname{Im} f^t) + \cancel{\dim W} - \dim(\operatorname{Im} f)$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f^t) = \dim(\operatorname{Im} f)$

$\operatorname{rnk}(A^T) = \dim(\operatorname{Im} f_A{}^T) = \dim \operatorname{Im}(f_A) = \operatorname{rnk} A.$

BIDUACE

$V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{K})$

$$\varphi_V : V \xrightarrow{\varphi_B} V^* \xrightarrow{\varphi_{B^*}} V^{**}$$

$$v_i \longrightarrow v_i^* \longrightarrow \varphi_V(v_i)$$

$\mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{K})$
$\shortparallel$
$\hookrightarrow \varphi_V(v_i) \in V^{**}$

$\varphi_V(v_i) : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$

$g \longrightarrow \varphi_V(v_i)(g)$

$= g(v_i)$

$$\varphi_V(v_i) : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$g \longmapsto \varphi_V(v_i)(g) = g(v_i)$$

è 1) isomorfismo canonico

2) $\forall B$ base di V $\quad \varphi_{B^*} \circ \varphi_B = \varphi_V$

1) • Dim che $\varphi_V(v_i) \in V^{**}$ cioè che $\varphi_V(v)$ è lineare.

$\forall v \in V \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall f, g \in V^*$ vale che

$$\varphi_V(v)(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(v) = (\lambda f)(v) + (\mu g)(v)$$

$= \lambda \varphi_v(v)(f) + \mu \varphi_v(v)(g)$

Dunque $\varphi_v(v)$ è lineare $\quad \varphi_v(v) : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$,

$\Rightarrow \varphi_V : V \longrightarrow V^{**}$ è ben definita.

- Dim. che $\varphi_V : V \longrightarrow V^{**}$ è lineare.

$\forall v_1, v_2 \in V \qquad \varphi_V(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \varphi_V(v_1) + \alpha_2 \varphi_V(v_2)$?

$\varphi_V(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)(g) = (\alpha_1 \varphi_V(v_1) + \alpha_2 \varphi_V(v_2))(g) =$

$= \alpha_1 \varphi_V(v_1)(g) + \alpha_2 \varphi_V(v_2)(g) \qquad \forall g \in V^*$

- bigettività di $\varphi_V : V \to V^{**}$

  suriettività $\longrightarrow$ $\dim V^{**} = \dim V$

  iniettività $\longrightarrow$ Sia $v \in \operatorname{Ker}(\varphi_V) \Rightarrow \varphi_V(v) = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \varphi_V(v)(g) = g(v) = 0 \quad \forall g \in V^* \Rightarrow v = 0$ poiché

  se $\exists\, v \neq 0$, $\exists\, g : V \to \mathbb{K}$ t.c. $g(v) \neq 0$ ↯

Dunque $\varphi_V : V \to V^{**}$ è isom. e non dipende da alcuna base.

2) • Devo mostrare che $\forall B$ base di V fissata $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

$$(\varphi_{B^*} \circ \varphi_B)(v_i) = \varphi_V(v_i) \quad \forall i$$

Poiché le due app. lineari coincidono su una base coincidono su $\forall$ elt. dello spazio e quindi sono uguali.

• Ma $(\varphi_B^* \circ \varphi_B)(v_i) \in V^{**}$ e $\varphi_V(v_i) \in V^{**}$

basta far vedere che coincidono su una base di V^*

e cioè $(\varphi_B{}^* \circ \varphi_B)(v_i)(v_j{}^*) = (\varphi_B{}^*(\underbrace{\varphi_B(v_i)}_{v_i{}^*}))(v_j{}^*) =$

$= (\varphi_B{}^*(v_i{}^*))(v_j{}^*) = (v_i{}^{**})(v_j{}^*) = \delta_{ij}$.

$\varphi_V(v_i)(v_j{}^*) = v_j{}^*(v_i) = \delta_{ij}$

Tesi.

Applicazione trasposta dal punto di vista matriciale

Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K}) = Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$

$A = f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \qquad f_A(X) = AX$

$f_A^T : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$\quad\quad\quad \overset{\shortparallel}{M}(1, m, \mathbb{K}) \longrightarrow M(1, n, \mathbb{K})$

$\forall R \in \mathbb{K}^m$ e $\forall X \in \mathbb{K}^n$

$f_A^T(R) = (A^T R^T)^T$

$f_A^t(R)(X) = RAX = (A^T R^T)^T X$

Se muniamo ogni $M(1, r, \mathbb{K})$ della base canonica C_r^* (duale della base canonica di $\mathbb{K}^r$) $\Rightarrow$

$$M^{C_m^*}_{C_n^*}(f^t_A) = A^T$$

In generale $\forall f \in Hom(V, W)$ $\quad M^{D^*}_{B^*}(f^t) = \left(M^B_D(f)\right)^t$

B base di V $\quad B^*$ base di V^*

D base di W $\quad D^*$ base di W^*

$Bil(V \times W, Z)$

V, W, Z $\mathbb{K}$-sp. v. $\qquad f: V \times W \to Z$

- Fisso $w_0 \in W$ $\qquad f_{w_0}: V \to Z$, $\quad v \mapsto (v, w_0)$

- Fisso $v_0 \in V$ $\qquad f_{v_0}: W \to Z$, $\quad w \mapsto (v_0, w)$

~ f si dice bilineare se
1) $\forall w_0 \in W$ $\quad f_{w_0}$ è lineare
2) $\forall v_0 \in V$ $\quad f_{v_0}$ è lineare

$Bil(V \times W, Z)$ = insieme di queste app. bilineari. è un $\mathbb{K}$-sp.

- "+" $(\phi + \varphi)(v, w) = \phi(v, w) + \varphi(v, w)$
- "·" $(\lambda \phi)(v, w) = \lambda \phi(v, w)$

CASO PARTICOLARE

$Bil(V \times V^*, \mathbb{K})$

Se $\dim V = n \Rightarrow \dim Bil(V \times V^*, \mathbb{K}) = n^2$.

dim

- $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ sia $B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$.
  ↳ base di V ↳ base di V^*

- definiamo $M_B(\cdot): Bil(V \times V^*, \mathbb{K}) \longrightarrow M(n, \mathbb{K})$

  t.c. $M_B(\phi) = \left(\phi(v_i, v_j^*)\right)_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}}$

  $\forall (v, \varphi) \in U \times V^*$ $\quad \boxed{\phi(v, \varphi) = [\varphi]_{B^*}^t \, M_B(\phi) \, [v]_B}$

  è una forma di passaggio alle coordinate.

ISOMORFISMO CANONICO

Definiamo $\tau : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V \times V^*, \mathbb{K})$

$\dim(\mathrm{End}(V)) = n^2 = \dim(\mathrm{Bil}(V \times V^*, \mathbb{K}))$

τ è isomorfismo canonico

$$\tau : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V \times V^*, \mathbb{K}) = M(n, \mathbb{K})$$

$$f \longrightarrow \tau(f) : V \times V^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(v, \phi) \longrightarrow \phi \circ f(v)$$

$$\underbrace{\tau(f)}_{\in \mathrm{End}(V)} \underbrace{(v, \phi)}_{\in V \times V^*} = \phi \underbrace{(f(v))}_{\in \mathbb{K}.}$$

dim

1) $\alpha(f) : V \times V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ è bilineare

$$\alpha(f)(v, \phi) = \phi \circ f(v)$$

$$\alpha(f)(v, \phi) + \alpha(f)(v', \phi)$$

- fisso $v \in V$ $\quad \forall\, \phi$ e $\psi \in V^*$

$$\alpha(f)(v, \phi + \psi) = \alpha(f)(v, \phi) + \alpha(f)(v, \psi)$$

- fisso ϕ $\quad \forall\, v, v' \in V$ $\quad \alpha(f)(v + v', \phi) = \alpha(f)(v, \phi) + \alpha(f)(v', \phi)$

$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ $\quad \alpha(f)(v, \lambda\phi) = \lambda(\alpha(f)(v, \phi))$ $\quad$ fisso v.

$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ $\quad \alpha(f)(\lambda v, \phi) = \lambda(\alpha(f)(v, \phi))$ $\quad$ fisso ϕ

2) τ è lineare $\qquad \tau : End(U) \longrightarrow Bil(U \times U^*, \mathbb{K}) = M(n, \mathbb{K})$

$\forall f, g \in End(U)$

- $\tau(f+g)(u, \phi) = \phi \circ (f(u) + g(u)) = (\phi \circ f(u)) + (\phi \circ g(u))$

$= \tau(f)(u, \phi) + \tau(g)(u, \phi) = \tau(f) + \tau(g)$

- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \tau(\lambda f)(u, \phi) = \phi \circ f(\lambda u) = \phi \circ (\lambda(f(u))) =$

$\lambda \phi(f(u)) = \lambda(\tau(f)(u, \phi)) = \lambda \tau(f)$

3) bigettività:

- surgettività ok perché hanno la stessa dim.
- iniettività ma τ è lineare $\Rightarrow$ mi basta mostrare che $\ker(\tau) = \{0\}$

$$\ker(\tau) = \{ f \in \mathrm{End}(V) \text{ t.c. } \forall (v, \phi) \in V \times V^* \ \overbrace{\phi \circ f(v)}^{\tau(f)} = 0 \}$$

Se $f \neq 0$ $\exists$ $v \in V$ t.c. $f(v) \neq 0$

Sia $B = \{v_1 = f(v), v_2, \dots v_n\}$ base di V

$B^* = \{v_1^*, \dots v_n^*\}$ base di V^* $\Rightarrow$ $v_1^*(\overbrace{f(v)}^{\neq 0 \text{ per hp}}) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow f \notin \ker(\tau)$