Esercitazione 20

martedì 11 gennaio 2022 18:30

PROPOSIZIONE

$A \in M(n, \mathbb{R})$ diagon. se $A^4 = I \Rightarrow A^2 = I$

dim

$\exists M \in GL(n, \mathbb{R})$ t.c. $D = MAM^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_j \in \mathbb{R}$

→ diagonale

$$D^4 = MA\underbrace{\cancel{M^{-1}M}}A\underbrace{\cancel{M^{-1}M}}A\underbrace{\cancel{M^{-1}M}}AM^{-1} = MA^4M^{-1} \overset{\downarrow}{=} MIM^{-1} = MM^{-1} = I$$

$A^4 = I$ per hp.

$$\Rightarrow D^4 = \begin{pmatrix} \lambda_1^4 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^4 \end{pmatrix} = I$$

cioè $\lambda_i^4 = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$

pongo $t = \lambda_i^2 \rightarrow t^2 = \lambda_i^4 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$

$t = \lambda_i^2 = \pm 1$ ma $\lambda_i^2 = -1 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_i^2 = 1$

$\Rightarrow D^2 = I$

$$A^2 = (M^{-1}DM)^2 = M^{-1}D\cancel{MM^{-1}}DM = M^{-1}D^2M \overset{\downarrow}{=} M^{-1}M = I$$

$D^2 = I$

Proposizione

$f \in End(V)$ $\forall \underline{v} \in V$ $\underline{v} \neq 0$ $\underline{v}$ è autovettore di $f \Leftrightarrow f \in Span(id_V)$

$\Leftarrow$ Se $f \in Span(id_V) \Rightarrow f = \lambda id_V \Rightarrow f(v) = \lambda id_V(v) = \lambda v$

cioè $\underline{v}$ è autovettore per f. $\forall \underline{v} \in V$.

$\Rightarrow B = \{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$ base di autovettori per f.

t.c. $f(\underline{v_i}) = \lambda_i \underline{v_i}$ $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Considero $v_1 + v_i$

$$\left.\begin{array}{l} f(\underline{v_1}+\underline{v_i}) = f(\underline{v_1}) + f(\underline{v_i}) = \lambda_1 v_1 + \lambda_i v_i \\ \text{ma } f(\underline{v_1}+\underline{v_i}) = \mu(v_1+v_i) = \mu v_1 + \mu v_i \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_i \Rightarrow f = \lambda_1 \mathrm{Id}_V$ cioè $f \in \mathrm{Span}(\mathrm{Id}_V)$

- $A \in M(n, \mathbb{K})$, $\underline{v} \in \mathbb{K}^n$ $v \neq 0$ $\underline{v}$ è autovett per $A \Rightarrow A \in \mathrm{Span}(I)$

Proposizione

$f, g \in \mathrm{End}(V)$ t.c. $fg = gf \Rightarrow$ gli autospazi di f sono g-invarianti

dim

Sia $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$ $\underline{v} \in V_\lambda(f)$

$$f(g(\underline{v})) = g(f(\underline{v})) = g(\lambda \underline{v}) = \lambda g(\underline{v}) \Rightarrow g(v) \in V_\lambda(f)$$

- $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ $AB = BA \Rightarrow$ gli autospazi di A sono B invarianti

PROPOSIZIONE

Il centro di $M(n, \mathbb{K})$ è $\mathrm{Span}(I)$

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$ $AB = BA$ $\forall B \in M(n, \mathbb{K})$

$\underline{v} \in \mathbb{K}^n$ $\underline{v} \neq 0$ costruisco B

Sia $\{\underline{v}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_n}\}$ base di $\mathbb{K}^n$

$$\begin{array}{l} \underline{v} \longmapsto \underline{v} \\ v_2 \longmapsto 0 \\ \vdots \\ v_n \longmapsto 0 \end{array}$$

$$M^B_B(L_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Spec}(B) = \{1, 0\}$

$\mathrm{Spec}(B) = \{1, 0\}$

$V_0(B) = \mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Span}(v_2, \dots, v_n)$

$V_1(B) = \mathrm{Ker}(B - I) = \mathrm{Span}(\underline{v})$

$V_1(B) = \mathrm{Span}(\underline{v}) \Rightarrow V_1(B)$ è A-invariante

$A\underline{v} \in \mathrm{Span}(\underline{v}) \Rightarrow A\underline{v} = \lambda \underline{v} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \Rightarrow \underline{v}$ è autovet di A.

$\Rightarrow A \in \mathrm{Span}(I)$

Proposizione

$f \in \mathrm{End}(V)$ $U, W \subset V$ ssp f-invarianti $V = U \oplus W$

f è diag $\Leftrightarrow$ $f|_U$ e $f|_W$ diagonalizz.

note: $f|_U : U \to U \quad f|_W : W \to W$.

$V_\lambda(f|_U) = \{u \in U \text{ t.c. } f(\underline{u}) = \lambda u\} = U \cap V_\lambda(f)$

dim

$\Leftarrow$ $\exists$ B base di U di autovettori per f $\}$ $\Rightarrow B \cup C$ base di V
$\exists$ C base di W di autovett. per f $\}$ di autovettori per f.

$\Rightarrow f$ diag.

$\Rightarrow$ $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$ $\underline{v} \in V_\lambda(f)$, $\exists!$ $\underline{u} \in U$ e $\underline{w} \in W$ t.c.

$\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

$\underset{\shortparallel}{\lambda \underline{v}} = f(\underline{v}) = f(\underline{u} + \underline{w}) = f(u) + f(w)$

$\lambda(u+w) = \lambda u + \lambda w \Rightarrow f(u) = \lambda u$ e $f(w) = \lambda w$

In generale.

Dati $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V di autovett per f

$\{u_1, \dots, u_n\}$ generatori di U

$\{u_1, \dots, u_n\}$ generatori di U

$\{w_1, \dots, w_n\}$ generatori di W

Si estrae base di U e W di autovettori per f

$\Rightarrow f|_U$ e $f|_W$ diag.

Proposizione

$f \in \mathrm{End}(V)$, $W \subset V$ ssp f-invariante

f diagonalizzabile $\Rightarrow f|_W$ diagonaliz.

$(V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}, \; W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (W \cap V_{\lambda_k}))$

dim

Costruisco U ssp di V f-invariante $V = U + W$.

$\exists \; \underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ base di autovettori per f.

$\underline{w_1}, \dots, \underline{w_k}$ base di W

Estraggo base di V da $w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_n$

ottengo $w_1, \dots, w_k, v_{i_{k+1}}, \dots, v_{i_n}$ base di V.

Pongo $U = \mathrm{Span}(\underset{\substack{\downarrow f \\ \lambda_{i_{k+1}} v_{i_{k+1}}}}{v_{i_{k+1}}}, \dots, \underset{\substack{\downarrow f \\ \lambda_{i_n} v_{i_n}}}{v_{i_n}})$ $\quad f(U) \subset U$ $\quad U$ è f-invar.

$\Rightarrow f|_W$ è diag.

SIMULTANEA DIAGONALIZZABILITÀ

$A, B \in M(n, \mathbb{K})$ diagonaliz.

$AB = BA \Leftrightarrow A$ e B sono simultaneamente diagonalizzabili

$AB = BA \iff A$ e B sono simultaneamente diagonalizzabili
cioè $\exists$ base di $\mathbb{K}^n$ di autovettori per entrambe
cioè $\exists\, M \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $\left.\begin{matrix} MAM^{-1} = D_1 \\ MBM^{-1} = D_2 \end{matrix}\right\}$ diagonali

dim

$\Leftarrow$ $\exists\, M \in GL(n,\mathbb{K})$ t.c. $MAM^{-1} = D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$MBM^{-1} = D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D_1 D_2 = D_2 D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$

$$AB = (M^{-1}D_1M)(M^{-1}D_2M) = M^{-1}(D_1D_2)M =$$
$$= M^{-1}(D_2D_1)M = M^{-1}D_2MM^{-1}D_1M = BA.$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$

$\mathbb{K}^n = V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(A) \Rightarrow V_{\lambda_i}(A)$ è B-invariante

$\Rightarrow B|_{V_{\lambda_i}(A)}$ è diagonalizz. $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}_i$ base di $V_{\lambda_i}(A)$
di autovettori di B (e di A)

$\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ base di $\mathbb{K}^n$ di autovettori di A e di B

Esercizio

Triangolare $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M(4, \mathbb{R})$

$P_A(t) = t^4$ $\quad \mathrm{spec}(A) = \{0\}$ $\quad V_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ $\quad \mathrm{rk}A = 3$ $\dim V_0(A) = 1$

considero $\underline{v_1} \in \mathrm{Ker}\, A = V_0(A) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

considero $\underline{v_1}, \overbrace{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}}^{W_1}$ base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$

$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Span}(v_1) \oplus W_1$ base C

$\underline{v_1}, \underbrace{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}}$ base B di $\mathbb{R}^4$

$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Span}(\underline{v_1}) \oplus W_1$ ↳ base C

$$M^C_C(\pi_{W_1} \circ f|_{W_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \xmapsto{f} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi_{W_1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 \xmapsto{f} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\pi_{W_1}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 \xmapsto{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \xmapsto{\pi_{W_1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$p_B(t) = -t^3$ $\quad$ $\mathrm{Spec}(B) = \{0\}$

$$M^B_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boxed{B} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$V_0(B) = \mathrm{Ker}\, B$ $\quad$ $\dim \underset{\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{Ker}\, B}} = 1$

$$\underline{v_2} = 0e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Span}(\underset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{v_1}}, \underset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{v_2}}) \oplus \underset{\mathrm{Span}(\underline{e_1}, e_2)}{\underset{\shortparallel}{W_2}}$$

$\pi_{W_2} \circ f|_{W_2} : W_2 \mapsto W_2$

$$M^D_D(\pi_{W_2} \circ f|_{W_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = C$$

$$e_1 \xmapsto{f} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi_{W_2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'autovettore è $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ chiamo $v_3 = e_2$

$= \underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{e_1}, \underline{e_2}$

$= \underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{e_1}, \underline{e_2}$

$$e_2 \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi_{W_1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{B'}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{C} & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

$$M^{D}_{D}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_4}$$

PROPOSIZIONE

$f \in End(V)$, $W \subset V$ ssp. f-invariante allora $p_{f|W} \mid p_f$

dim

Sia $C = \{w_1, \dots, w_k\}$ base di W completo con $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ a base B di V.

$$M^B_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \qquad A = M^C_C(f|W)$$

$$p_f(t) = \det(A - tI)\det(C - tI) = p_A(t)\, p_C(t) =$$

$$= p_{f|W}(t)\, p_C(t) \quad \Rightarrow \quad p_{f|W} \mid p_f$$

$$C = M^D_D(\pi_U \circ f|U) \text{ con } V = Span(\overbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}^{D \text{ base di } U})$$

$$V = W + U \xrightarrow{\pi_U} U$$

f triang $\Rightarrow$ $f|W$ triang.

$p_{f|W} \mid p_f$ ma p_f è complet fatt $\Rightarrow$ $p_{f|W}$ è comp. fatt.

$p_{f|W} \mid p_f$ ma p_f è complet fatt $\Rightarrow p_{f|W}$ è comp. fatt.

SIMULTANEA TRIANGOLABILITA'

$A, B \in M(n, \mathbb{K})$

$AB = BA \iff$ A e B sono simult. triang.
cioè se $\exists$ una base di V a bandiera f-invar. sia per A che per B.

dim

Prendo un autovettore per A e per B v_1

$\Rightarrow \mathbb{K}^n = \text{Span}(v_1) \oplus W_1$

$\exists \lambda \in \text{Spec}(A)$ t.c. $V_\lambda(A)$ è B-invariante.

$\Rightarrow B|_{V_\lambda(A)}$ è triang. $\Rightarrow \exists\, v \in V_\lambda(A)$ autovettore di B.