Esercitazione 21

martedì 11 gennaio 2022 23:38

Ideale

V sp. v/$\mathbb{K}$. $\dim V = n$ $f \in End(V)$

- $val_f : \mathbb{K}[t] \longrightarrow End(V)$ lineare definita sulla base standard $t^k \mapsto f^k$
  $val_f(p) = p(f)$
- se $p = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \Rightarrow p(f) = a_0 id_V + a_1 f^1 + \dots + a_m f^m$
- val_f è omo di anelli
- $Im(val_f) = \mathbb{P}(f) = \mathbb{K}[f] = Span(id_V, f, f^2, \dots)$ è un sottoanello commutativo di $End(V)$
- $Ker(val_f) = I(f) \neq \{0\}$ è l'ideale di f. e il suo generatore monico è μ_f = pol. minimo di f.
- $I(f) = (\mu_f) = \{ p \in \mathbb{K}[t] \text{ t.c. } \mu_f \mid p \}$ è invariante per coniugio

Proposizione

$p \in I(f) \iff Im\, p(f) = p(f)(V) = \{0\}$

$\iff Ker\, p(f) = V$

$\iff \forall v \in V \quad p(f)(v) = 0$

Proposizione

Ogni $p \in I(f)$ corrisponde a una comb. lineare nulla di potenze di f.

$p = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \Rightarrow 0 = p(f) = a_0 id_V + a_1 f + \dots + a_m f^m$.

viceversa.

$a_0 id_V + a_1 f + \dots + a_m f^m = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \in I(f)$

e $\exists\, a_m \neq 0$

oss

$\exists\, p \in I(f) \quad \deg p = m \iff f^m \in Span(id_V, f, f^2, \dots, f^{m-1})$

OSS

$\exists\, p \in I(f)\ \deg p = m \iff f^m \in \operatorname{Span}(\operatorname{id}_V, f, f^2, \dots, f^{m-1})$

Proposizione

- Il pol. minimo μ_f dà la "minima" combinaz. lineare nulla di potenze di f.
- $\deg \mu_f = d \iff \operatorname{id}_V, f, f^2, \dots, f^{d-1}$ sono lin. indip e $f^d \in \operatorname{Span}(\operatorname{id}_V, f, f^2, \dots, f^{d-1})$
- $\dim P(f) = \deg \mu_f$
  potenze di f

cioe' $\operatorname{id}_V, f, f^2, \dots, f^{d-1}$ sono una base di $P(f) = \operatorname{Span}(\operatorname{id}, f, f^2, \dots)$

dim
- lin. ind visto prima
- generano $\to f^d = a_0 \operatorname{id}_V + a_1 f + \dots + a_{d-1} f^{d-1}$ $\quad a_j \in \mathbb{K}$.

$f^{d+1} = a_0 f + a_1 f^2 + \dots + a_{d-1} f^d \in \operatorname{Span}(\operatorname{id}_V, f, \dots, f^{d-1})$

$f^{d+2} = a_0 f^2 + a_1 f^3 + \dots + a_{d-1} f^{d+1} \in \operatorname{Span}(\operatorname{id}_V, f, \dots, f^{d-1})$

$\Updownarrow$ induzione

$f^{d+k} \in \operatorname{Span}(\operatorname{id}_V, f, f^2, \dots, f^{d-1}) \quad \forall k \geq 0.$

Metodi per calcolare μ_f

Metodo 1

1) Trovare il minimo d per cui $f^d \in \operatorname{Span}(\operatorname{id}_V, f, f^2, \dots, f^{d-1})$
2) Scrivere $f^d = a_0 \operatorname{id}_V + a_1 f + \dots + a_{d-1} f^{d-1}$
3) $\mu_f = t^d - (a_{d-1} t^{d-1} + \dots + a_1 t + a_0)$

Esempio metodo 1

Data B base di V $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $f \in \operatorname{End}(V)$ t.c.

$v_1 \xrightarrow{f} v_2$ ...

Data B base di V $B = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}\}$, $f \in End(V)$ t.c.

$v_1 \overset{f}{\longmapsto} v_2$
$v_2 \longmapsto v_3$ Trovare μ_f.
$v_3 \longmapsto v_1$

<u>Sol</u>

- Considero $\{id_V, f\}$. Sono lin. dipendenti?

$$f \overset{?}{=} \lambda\, id_V \; ?$$

$v_1 \overset{f}{\longmapsto} v_2$
$v_2 \longmapsto v_3$ guardo la mappa e affermo che non sono lin. dipen.
$v_3 \longmapsto v_1$

- Considero $\{id_V, f, f^2\}$ sono lin. dipen? cioè $f^2 \overset{?}{=} a_0\, id_V + a_1 f$

$v_1 \overset{f^2}{\longmapsto} v_3$ applico a v_1.
$v_2 \longmapsto v_1$ $f^2(\underline{v_1}) = a_0\, id_V(\underline{v_1}) + a_1 f(\underline{v_1}) = a_0 \underline{v_1} + a_1 \underline{v_2}$
$v_3 \longmapsto v_2$

ma $f^2(\underline{v_1}) = \underline{v_3} \neq a_0 \underline{v_1} + a_1 \underline{v_2}$ quindi sono lin indip.

- Considero $\{id_V, f, f^2, f^3\}$

$v_1 \overset{f^3}{\longmapsto} v_1$
$v_2 \longmapsto v_2$ $\Rightarrow f^3 = id_V \Rightarrow f^3 - id_V = 0 \Rightarrow \mu_f(t) = t^3 - 1$.
$v_3 \longmapsto v_3$

$P(f) = Span(id_V, f, f^2) \Rightarrow \{id_V, f, f^2, f^3\}$ sono lin dip.

Esempio con le matrici

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\dim V = 3$ $\exists\, B$ base di V t.c. $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$.

Trovare $\mu_A = \mu_f$

<u>Sol</u>

Considero $\{I, A\} \rightsquigarrow A = \lambda I \,? \to$ NO, sono lin indip.

Considero $\{I, A, A^2\} \rightsquigarrow A^2 \overset{?}{=} a_0 I + a_1 A \,?$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2a_1 + a_0 & a_1 & a_1 \\ 0 & -a_1 + a_0 & 0 \\ \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -a_1+a_0 & 0 \\ & & a_0 \\ -a_1 & a_1 & \end{pmatrix}$$

voglio che:

$\Rightarrow -2a_1 + a_0 = 3 \quad , \quad a_1 = -2 \quad , \quad a_0 = -1$

$+4 -1 = -3$ <u>ok</u>

$$A^2 = a_0 I + a_1 A = -I - 2A \Rightarrow A^2 + 2A + I = 0$$

$$\mu_A = t^2 + 2t + 1$$

Metodo 2 per il calcolo di μ_f

Per trovare μ_f, se si conosce un $p \in I(f)$ basta controllare i divisori di p. perchè $\mu_f \mid p \quad \forall p \in I(f)$

esempio metodo 2

$$f^5 = 2f^3 - f \in I(f) \Rightarrow \mu_f \mid p = t^5 - 2t^3 - t = t(t-1)^2(t+1)^2$$

$$\mu_f = \begin{cases} \xrightarrow{\text{grado 1}} t,\ t-1,\ t+1 \\ \xrightarrow{\text{grado 2}} (t-1)^2,\ (t+1)^2,\ t\cdot(t-1),\ t(t+1),\ (t-1)(t+1) \\ \xrightarrow{\text{grado 3}} t(t-1)^2,\ t\cdot(t+1)^2,\ (t-1)(t+1)^2,\ (t+1)(t-1)^2,\ t(t-1)(t+1) \\ \xrightarrow{\text{grado 4}} (t-1)^2(t+1)^2,\ t(t-1)^2(t+1),\ t(t-1)(t+1)^2 \\ \xrightarrow{\text{grado 5}} p \end{cases}$$

Prendo una matrice A che rispetti la condizione $A^5 = 2A^3 - A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

$t \qquad t+1 \qquad t-1$

- grado 1 li escludo perché $A \neq 0$, $A+I \neq 0$, $A-I \neq 0$
- grado 2 li escludo perché $\det(A) = 0 \Rightarrow A$ non invertibile
  ma se considero $(A-I)^2 = A^2 - 2A + I \Rightarrow I = A^2 - 2A \Rightarrow$
  $I = A(\underbrace{-A+2I}_{= A^{-1}}) \Rightarrow A$ invert. $\not\exists$

  $(t-1)^2$, $(t+1)^2$, $(t-1)(t+1)$

- grado 2 $\longrightarrow$ $t(t-1)$ e $t(t+1)$

  $A(A-I) \neq 0$ $\quad \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

  $A(A+I) \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0.$

- grado 3

  $t(t-1)(t+1) \rightsquigarrow A(A-I)(A+I) \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

  $t(t+1)^2 \longrightarrow A(A+I)^2 \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$

  $t(t-1)^2$ $\quad A(A-I)^2 = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $\mu_A(t) = t(t-1)^2$

POL CARATTERISTICO e POL MINIMO

- Hamilton - Caley $\rightsquigarrow$ $p_f \in I(f) \Rightarrow \mu_f \mid p_f$
- $\forall p \in I(f)$ $\quad \mathrm{Spec}(f) \subset \{$radici in $\mathbb{K}$ di $p\}$.

  $\lambda \in \mathrm{Spec}\, f$ $\quad \exists\ \underline{v} \neq 0$ v autovettore per λ t.c. $f(v) = \lambda v \Rightarrow$
  $f^K(\underline{v}) = \lambda^K \underline{v}$ $\quad \forall K \geq 0$

$p = a_0 + a_1 t + \_\_ + a_m t^m \qquad p_f(v) = (a_0 \mathrm{Id}_V + a_1 f + \_\_ + a_m f^m)(\underline{v}) =$

$= a_0 v + a_1 \lambda v + \_\_ + a_m \lambda^m v = (a_0 \mathrm{Id}_V + a_1 \lambda + \_\_ + a_m \lambda^m)\, \underline{v} =$

$= p(\lambda)(v) \quad$ ma $\quad p(f)(v) = 0 \implies \underbrace{p(\lambda)(v)}_{\neq 0} = 0 \implies p(\lambda) = 0 \implies \lambda$ radice di p.

- $\mathrm{Spec}(f) = \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } p_f\} = \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } \mu_f\}$

$\subset$

$\supset$ perche' $\mu_f \mid p_f$

- p_f e μ_f hanno gli stessi fattori irriducibili

esempio precedente.

$p_A = -t(1-t)^4 \qquad \mathrm{Spec}(A) = \{0, 1\}$

$\mu_A \mid p_A$ e μ_A e p_A hanno lo stesso spettro $\implies$

$\mu_A = t(t-1)$, $t(t-1)^2 \rightsquigarrow$ ST, $t(t-1)^3$, p_A

Metodo 3 per calcolo di μ_f

Polinomio minimo relativo.

Sia $\underline{v} \in V \quad v \neq 0 \qquad \mathrm{Val}_v : \mathrm{End}(V) \longrightarrow V \quad$ lineare.

$g \longrightarrow g(v)$

- $\mathrm{Val}_{f,v} : \mathbb{K}[t] \xrightarrow{\mathrm{Val}_f} \mathrm{End}(V) \xrightarrow{\mathrm{Val}_v} V$

$p \longrightarrow p(f) \longrightarrow p(f)(v)$

- $\mathrm{Im}(\mathrm{Val}_{f,v}) = \mathcal{P}(f, v) = \mathrm{Span}(\underline{v}, f(v), f^2(v), \_\_)$

- $\mathrm{Ker}\, \mathrm{Val}(f, v) = \mathcal{I}(f, v) =$ ideale di $\underline{v}$ relativo a f e il generatore monico è

$\mu_{f,v} =$ pol. minimo di $\underline{v}$ relativo a f.

- $\dim P(f,v) = \deg \mu_{f,v} = d$ e $v, f(v), f^2(v), \dots, f^{d-1}(v)$ sono base di $P(f,v)$

- $I(f,v) = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(f)(v) = \underline{0}\} \supset I(f) \Rightarrow \mu_{f,v} \mid \mu_f$

pol. min relativo

pol. minimo globale

Proposizione

$\underline{v_1}, \dots, \underline{v_m}$ generatori di V

$\mu_f = \text{m.c.m}(\mu_{f,v_1}, \dots, \mu_{f,v_m}) = m$ monico

dim

$\mu_{f,v_j} \mid \mu_f \quad \forall j = 1 \dots m \xRightarrow{\text{prop m.c.m}} m \mid \mu_f$

mostro ora che

$\mu_f \mid m$ e cioè $m \in I(f)$ e cioè $\forall v \in V \; m(f)(\underline{v}) = 0$

$\exists \alpha_j$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

$\exists h_j \in \mathbb{K}[t]$ t.c. $m = h_j \mu_{f,v_j} \quad \forall j = 1 \dots m$.

$$m(f)(\underline{v}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, m(f)(v_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (h_j \mu_{f,v_j})(f)(v_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left(h_j(f) \circ \mu_{f,v_j}(f)\right)(v_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j h_j(f)\Big(\underbrace{\mu_{f,v_j}(f)(v_j)}_{\substack{=0 \\ \in I(f,v_j)}}\Big) = \underline{0}$$

$\Rightarrow \mu_f \mid m \Rightarrow \mu_f = \lambda m \quad \lambda \in \mathbb{K}$ ma sono monici $\Rightarrow \lambda = 1$