Esercitazione 23

martedì 11 gennaio 2022 23:38

Matrice compagna

Ogni polinomio monico è un pol. minimo / I caratteristico.

Se $q \in \mathbb{K}[t]$ è monico $q(t) = t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \dots + a_0$

la matrice compagna di q è $C_q \in M(d, \mathbb{K})$ $C_q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots\ 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$

$\mu_{C_q} = q = (-1)^d p_{C_q}$.

$p_f = q_f$ perché la base è ciclica.

$d-1 \times d-1$ mat compagna.

$$p_{C_q} = \det\begin{pmatrix} -t & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & -t & \\ 0 & & 1 & -a_{d-1}-t \end{pmatrix} = -t \det\begin{pmatrix} -t & & -a_1 \\ 1 & \ddots\ -t & \vdots \\ 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} - a_0(-1)^{d+1}\det\begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ & \ddots & -t \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -t\left((-1)^{d-1}(t^{d-1} + a_{d-1}t^{d-2} + \dots + a_1)\right) - a_0(-1)^{d+1} =$$

$$= (-1)^d(t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \dots + a_1 t + a_0) = (-1)^d q$$

Proposizione

$W \subset V$ ssp f-invariante $U \subset V$ ssp t.c. $V = W \oplus U$

$g = \pi_U \circ f|_U \in \mathrm{End}(U)$. Trovare $I(g)$

$\pi_U : V \to V$ è la proiez. su U data da $\oplus$

$\mathrm{Ker}\,\pi_U = W$, $\mathrm{Im}\,\pi_U = U \Rightarrow \pi_U|_W = 0$ $\pi_U|_U = id_U$

Mostriamo che $\pi_U \circ f \circ \pi_W = \pi_U \circ f$

Sia $v \in V$ $v = w + u$.

- $(\pi_U \circ f \circ \pi_W)(v) = (\pi_U \circ f \circ \pi_W)(w+u) = (\pi_U \circ f)(u) = \pi_U(f(u))$

$\|$

- $(\pi_U \circ f)(v) = (\pi_U \circ f)(w+u) = \pi_U(f(w) + f(u)) = \pi_U(f(u))$

$\cdot\ (\pi_U \circ f)(v) = (\pi_U \circ f)(w+u) = \pi_U\big(\underset{W}{\underset{\cap}{f(w)}} + f(u)\big) = \pi_U(f(u))$

Considero ora $g^k = \underbrace{(\pi_U \circ f|_U) \circ \dots \circ (\pi_U \circ f|_U)}_{k \text{ volte}} =$

$= \pi_U \circ f \circ \dots \circ \pi_U \circ f \circ \pi_U \circ f \circ \pi_U \circ f|_U = \pi_U \circ f^{k-1} \circ f|_U = \pi_U \circ (f^k)|_U$

$\Rightarrow g^k = \pi_U \circ (f^k)|_U \qquad p \in \mathbb{K}[t] \qquad id_U = \pi_U \circ id_V|_U$

$p(g) = a_k g^k + \dots + a_0 id_U = \pi_U \circ p(f)|_U$

$I(g) = \{p \in \mathbb{K}[t] \text{ t.c. } p(g) = 0\} = \{p \in \mathbb{K}[t] \text{ t.c. } \pi_U \circ p(f)|_U = 0\}$

$= \{p \in \mathbb{K}[t] \text{ t.c. } p(f)(U) \subset W\} \supset I(f)$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} Im\, p(f)|_U = p(f)(U) \\ Ker\, \pi_U = W \end{cases}$

$\mu_g \mid \mu_f$

Proposizione

p_f e μ_f hanno gli stessi fattori irriducibili

dim per induzione su dim V

$\underline{v} \in V \quad \underline{v} \neq 0 \qquad W = P(f, v) = Span(v, f(v), \dots)$

$U \subset V$ supplementare di W cioè $V = W \oplus U \qquad g = \pi_U \circ f|_U$

$q \in \mathbb{K}[t]$ irrid.

$q \mid \mu_f, \quad \mu_f \mid p_f \Rightarrow q \mid p_f$

se $q \mid p_f$ considero C base di W e D base di U

$\{C \cup D\} = B$ base di $V \Rightarrow m_B^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$

$$p_f = p_A \cdot p_C = p_{f|W} \cdot p_g \Rightarrow \begin{cases} q \mid p_{f|W} \\ q \mid p_g \end{cases}$$

$A = \mathfrak{M}_C^C(f|W)$

$C = \mathfrak{M}_D^D(g)$

induz.

$$q \mid p_g \Rightarrow q \mid \mu_g \mid \mu_f \Rightarrow q \mid \mu_f$$

$$q \mid p_{f|W} = \pm \mu_{f|W} \mid \mu_f$$

Oss

Se anche U è f-invariante $V = \overbrace{W \oplus U}^{f\text{-invariante}}$

$$\mu_f = \text{mcm}(\mu_{f|W}, \mu_{f|U}) = m$$

$$\mu_{f|W} \mid \mu_f \;,\; \mu_{f|U} \mid \mu_f \Rightarrow \boxed{m \mid \mu_f}$$

viceversa

sia $\underline{v} = \underline{w} + \underline{u}$ $\quad m = h_1 \mu_{f|W} \quad m = h_2 \mu_{f|U}$

$$m(f)(\underline{v}) = m(f)(w+u) = m(f)(w) + m(f)(u) =$$

$$= h_1(f)(\underbrace{\mu_{f|W}(f)(w)}_{=0}) + h_2(f)(\underbrace{\mu_{f|U}(f)(u)}_{=0}) = 0+0 = 0$$

$$\Rightarrow m(f) = 0 \Rightarrow m \in I(f) \Rightarrow \boxed{\mu_f \mid m} \Rightarrow \mu_f = m$$

Proposizione

- $\forall p \in \mathbb{K}[t]$ $\operatorname{Ker} p(f)$ e $\operatorname{Im} p(f)$ sono f-invarianti.
- $p(f)(\operatorname{Ker} p(f)) = \{\underline{0}\} \Rightarrow p \in I(f|_{\operatorname{Ker} p(f)})$
- $\operatorname{Ker} p(f) = \{0\} \Leftrightarrow p(f)$ è invertibile $\Leftrightarrow (p, \mu_f) = 1$

dim

$\Leftarrow$ $\exists\, h_1, h_2 \in \mathbb{K}[t]$ t.c. $1 = h_1 p + h_2 \mu_f \Rightarrow$

$$id_V = h_1(f) p(f) + \cancel{h_2(f) \mu_f(f)} \Rightarrow p(f)^{-1} = h_1(f)$$

$\Rightarrow (p, \mu_f) = q \quad \deg q > 0 \quad \exists\, p_1, p_2 \in \mathbb{K}[t]$ t.c.

$p = p_1 q \quad \mu_f = p_2 q \Rightarrow 0 = p_2(f) \cdot q(f)$

$\hookrightarrow p(f)$ è invert $\Rightarrow \quad p(f) = p_1(f) q(f) \Rightarrow$

$q(f)$ è invertibile ma $\deg p_2 < \deg \mu_f$?

$\Rightarrow p_2(f) = 0 \Rightarrow p_2 \in I(f)$

composizione di μ_f in irriducibili

$\mu_f = p_1^{m_1}, \ldots, p_k^{m_k}$ $p_i \in \mathbb{K}[t]$ irriducibili distinte, da una decomposizione di V in ssp f-invarianti non nulli.

$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} p_i^{m_i}(f)$ e $\mu_{f|\operatorname{Ker} p_i^{m_i}(f)} = p_i^{m_i}$

ALTRO CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITA'

f diag $\Leftrightarrow \mu_f = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec}(f)} (t - \lambda)$ cioè complet. fatt. su $\mathbb{K}$, con radici di molteplicità 1

$\Leftarrow \; V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec}(f)} \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_V) = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} f} V_\lambda$

$\Rightarrow \underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}$ base di autovettori di f, $f(v_i) = \lambda_i v_i \quad \lambda_i \in \mathbb{K}$.

$\mu_f = \text{m.c.m}(\mu_{f, v_1}, \ldots, \mu_{f, v_n})$ ma $\mu_{f, v_i} = t - \lambda_i \Rightarrow \mu_f = \prod_{\lambda \text{ distinti}} (t - \lambda_i)$

Proposizione

$W \subset V$ ssp f-invariante

f diag $\Rightarrow f_{|W}$ diag.

$\mu_{f|W} \mid \mu_f \Rightarrow$ complet fatt su $\mathbb{K}$ con radici di molt. 1.

Proposizione

$A \in M(n, \mathbb{C})$ invertibile : A^3 diag $\Rightarrow A$ è diag.

$A \in M(n, \mathbb{C})$ invertibile : A^3 diag $\Rightarrow$ A è diag.

$$\mu_{A^3} = \prod_{\lambda \in Spec(A)} (t-\lambda) \Rightarrow \prod_{\lambda \in Spec(A)} (A^3 - \lambda I) = 0 \Rightarrow \prod_{\lambda \in Spec(A)} (t^3 - \lambda) \in I(A)$$

$$\mu_A \mid \prod_{\lambda \in Spec(A)} (t^3 - \lambda)$$ $\hookrightarrow$ radici di molt. 1 $\Rightarrow$ A diag.