Esercitazione 4

lunedì 3 gennaio 2022 15:52

SOTTOSPAZI

- Dato V un $\mathbb{K}$ sp. v. i ssp ovvi sono $\{0\}$ e V.
- I ssp di $\mathbb{R}$ sono solo $\{0\}$ e $\mathbb{R}$.

↳ dim

Supp $\exists\, W \subseteq \mathbb{R}$ ssp, sia $\underline{v} \in W$ t.c. $\underline{v} \neq 0$

$\Rightarrow \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}$ $\quad \underline{x} = \left(\frac{x}{v}\right) v$ perché $\underline{v} \in$ a un campo

$\Rightarrow \underline{x} \in W \Rightarrow W = \mathbb{R}$

- def. di retta → sia $\underline{v} \neq 0$ $\quad \underline{v} \in V$ $\quad \mathrm{Span}(\underline{v}) = \{\alpha \underline{v} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$

↓ retta gener. da v.

- ssp di $\mathbb{R}^2$ sono $\{0\}$, rette passanti per 0, $\mathbb{R}^2$.

↓ dim.

[Rette passanti per l'orig] $= K$ $\quad K$ ssp di $\mathbb{R}^2$.

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0, \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- $0 \in K$? → si per $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad a0 + b0 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K$.
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K$ $\quad \begin{cases} a x_1 + b y_1 = 0 \\ a x_2 + b y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in K.$$

- $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda a x_1 + \lambda b y_1 = 0 \quad a(\lambda x_1) + b(\lambda y_1) \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in K.$$

ssp di $\mathbb{R}^3$ sono: $\{0\}$, rette pass per 0, piani pass per 0, $\mathbb{R}^3$

ssp di $\mathbb{K}^3$ sono: $\{0\}$, rette pass per 0, piani pass per 0, $\mathbb{R}^3$,

I ssp di $\mathbb{R}^n$ sono tutti i $\mathbb{R}^k$ $0 \le k \le n$.

SPAN

V sp. v. $/\mathbb{K}$ $\quad W$ ssp di V $\quad S \subset V$ $\quad S \neq \emptyset$

$\text{Span}(S) \subset W \iff S \subset W$

dim

vale sempre

hp.

$\Rightarrow$ $S \subseteq \text{Span}(S)$ $\Rightarrow$ $S \subseteq \text{Span}(S) \subset W$

$\Leftarrow$ $\underline{v}_i \in S$ $\forall i = 1,\dots,k$ $\underline{v}_i \in W$ perche' $S \subseteq W$ per hp.

W è ssp, chiuso per $+$ e $\cdot$ $\Rightarrow \alpha_i \underline{v_i} \in W \quad \alpha \in \mathbb{K}$

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \_\_\_ + \alpha_k v_k}_{\text{Span}(S)} \in W$$

$\Rightarrow \text{Span}(S) \subset W.$

Esercizio

Trovare i generatori di $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x - y + 2z = 0 \\ 3x - z + t = 0 \end{matrix} \right\}$

Risolvere sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x - z + t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x + 2z \\ t = z - 3x \end{cases}$$

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \\ t \end{pmatrix} \in W \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+2z \\ z \\ z-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \\ -3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \text{Span}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{generatori di } W.}\Bigg)$$

Unione di ssp.

Unione di ssp.

$W_1 \cup W_2$ è ssp $\Leftrightarrow$ $W_1 \subseteq W_2 \vee W_2 \subseteq W_1$

dim

$\Leftarrow$ Se $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_1 \cup W_2 = W_2$ che è ssp

Se $W_2 \subseteq W_1 \Rightarrow W_1 \cup W_2 = W_1$ che è ssp

$\Rightarrow$ Se $W_1 \not\subseteq W_2 \Rightarrow \exists\, \underline{w_1} \in W_1$ t.c. $\underline{w_1} \notin W_2$

e $\exists\, \underline{w_2} \in W_2$ t.c. $\underline{w_2} \notin W_1$.

$\underline{w_1} \in W_1 \cup W_2$ $\quad \underline{w_2} \in W_1 \cup W_2$ ma $W_1 \cup W_2$ è ssp per

hp $\Rightarrow \underline{w_1} + \underline{w_2} \in W_1 \cup W_2$.

Chiamo $\underline{v} = \underline{w_1} + \underline{w_2} \Rightarrow \underline{w_1} = v - w_2$

se $\underline{v} \in W_1 \Rightarrow \underline{w_2} \in W_1$ ↯ $\quad$ se $\underline{v} \in W_2 \Rightarrow \underline{w_1} \in W_2$ ↯