Esercitazione 8

martedì 4 gennaio 2022 09:08

INDIPENDENZA LINEARE.

- V sp. $v/\mathbb{K}$. $v_1, \dots, v_k \in V$ sono lin. indip $\Leftrightarrow$ $v_1, \dots, v_{k-1}$ sono lin. indip. e $v_k \notin Span(v_1, \dots, v_{k-1})$

$\Rightarrow$

$\{v_1, \dots, v_{k-1}\} \subset \{v_1, \dots, v_{k-1}, v_k\} \Rightarrow v_1, \dots, v_{k-1}$ lin. indip

Un sottoinsieme di un insieme di vett. lin. indip è ancora lin. indip.

Se $v_k \in Span\{v_1, \dots, v_{k-1}\} \Rightarrow \exists\, a_j \in \mathbb{K}$ $j = 1, \dots, k-1$ t.c.

$v_k = a_1 v_1 + \dots + a_{k-1} v_{k-1} \Rightarrow v_k - a_1 v_1 + \dots + a_{k-1} v_{k-1} = 0$ ↯

perchè $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip per hp.

$\Leftarrow$ Sia $a_j \in \mathbb{K}$ $\forall j = 1, \dots, k$ $0 = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$

Se $\exists\, a_k \neq 0 \Rightarrow v_k = a_k^{-1}(a_1 v_1 + \dots + a_{k-1} v_{k-1})$

cioè $v_k \in Span(v_1, \dots, v_{k-1})$ ↯

se $a_k = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip.

- $v_1, \dots, v_k \in V$ sono lin. indip. $\Leftrightarrow$ $v_1 \neq 0$ $v_i \notin Span(v_1, \dots, v_{i-1})$ $\forall i = 2, \dots, k$.

$\exists\, w_1 \in \{v_1, \dots, v_k\}$ $w_1 \neq 0$.

$\exists\, w_2 \in \{v_1, \dots, v_k\}$ t.c. $w_2 \notin Span(w_1)$

$\vdots$

$\exists\, w_i \in \{v_1, \dots, v_k\}$ t.c. $w_i \notin Span(w_1, \dots, w_{i-1})$

- $v_1, \dots, v_k \in V$ sono lin. indip $\Leftrightarrow$ $\forall i = 1, \dots, k$ $v_i \notin Span(v_1, \dots, \cancel{v_i}, \dots, v_k)$

$\Rightarrow$ Se $v_i \in Span(v_1, \dots, \cancel{v_i}, \dots, v_k)$ $\exists\, a_j \in \mathbb{K}$ $\forall j = 1, \dots, k$ $j \neq i$.

t.c. $v_i = a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + \dots + a_k v_k \Rightarrow$

$j \neq i$.

t.c. $v_i = a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + \dots + a_k v_k \Rightarrow$

$v_i - a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$ ↯

$\Leftarrow$ $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$

Se $a_i \neq 0 \Rightarrow v_i = -\frac{1}{a_i}(a_1 v_1 + \dots + \cancel{a_i v_i} + \dots a_k v_k)$

$v_i \in \text{Span}(v_1, \dots, \cancel{v_i}, \dots, v_k)$ ↯