Esercitazione 9

martedì 4 gennaio 2022 09:08

BASI

V sp. v $/\mathbb{K}$. $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_K} \in V$. I seguenti fatti sono equivalenti

1) $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_K}$ base di V.

2) $\{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_K}\}$ e' un insieme di generatori di V minimale.

se diminuisco non sono + generat.

3) $\{v_1, \dots, v_K\}$ è un insieme di vett. lin. indip massimale

se agg uno non sono + lin. indip

4) $K = \dim V$ e $v_1, \dots, v_K$ generatori di V

5) $K = \dim V$ e $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_K}$ lin. indip.

dim quaderno.

Proposizione

$f: V \to W$ lineare V, W s.p. $/\mathbb{K}$. $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_K} \in V$.

$f(\underline{v_1}), \dots, f(\underline{v_K})$ sono lin. indip $\Leftrightarrow$ $v_1, \dots, v_K$ sono lin. indip.
e $\text{Span}(v_1, \dots, v_K) \cap \text{Ker} f = \{0\}$.

dim

$\Rightarrow$) considero $\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_K \underline{v_K} = 0$ con $\alpha_j \in \mathbb{K}$

applico $f \to$ $0 \underset{f \text{ lineare}}{=} f(0) = f(\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_K \underline{v_K}) = \alpha_1 f(\underline{v_1}) + \dots + \alpha_K f(\underline{v_K})$

per hp $f(v_j)$ sono lin. indip $\Rightarrow \alpha_j = 0$

$\forall j = 1, \dots, K \to \underline{v_j}$ sono lin. indip $\forall j = 1, \dots, K$

Considero $\underline{v} \in \text{Span}(v_1, \dots, v_K) \cap \text{Ker} f$.

$$\begin{cases} \underline{v} \in \text{Ker} f \Rightarrow f(\underline{v}) = 0 \\ \underline{v} \in \text{Span}(v_1, \dots, v_K) \Rightarrow v = \alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_K \underline{v_K} \quad \alpha_j \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

$0 = f(\underline{v}) = f(\alpha_1 \underline{v_1} + \_ + \alpha_k \underline{v_k}) = \alpha_1 f(\underline{v_1}) + \_ + \alpha_k f(v_{\underline{k}})$ ma

$f(v_j)$ sono lin. indip $\forall j = 1, \_ k \Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1 \; k$

$\Rightarrow \underline{v} = 0 \Rightarrow \quad \cap = \{0\}$

$\Leftarrow \quad \underset{\shortparallel}{\alpha_1} f(v_1) + \_ + \alpha_k f(v_k) = 0$

$0 = f(\alpha_1 v_1 + \_ + \alpha_k v_k) \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \_ \alpha_k v_k \in \ker f$

$\in Span(v_1, - v_k)$

$\Rightarrow \alpha_1 \underline{v_1} + \_ + \alpha_k \underline{v_k} \in \ker f \cap Span(v_1, \_, \underline{v_k}) \underset{hp}{=} \{0\}$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \_ + \alpha_k v_k = 0$ ma v_j sono lin indip per hp

$\Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \_, k \Rightarrow f(v_i)$ sono lin indip $\forall i = 1, \_ k.$