ENDOMORFISMI

Titolo nota 06/09/2021

TIPI DI ENDOMORFISMI

1) endomorfismi coniugati
2) endomorfismi diagonalizzabili
3) endomorfismi triangolabili.

NOZIONE PRINCIPALE

Un endomorfismo è un morfismo $f: V \longrightarrow V$ V sp.v/$\mathbb{K}$

$End(V) = \{ f: V \to V \mid f \text{ è lineare} \}$

$\dim(End(V)) = n^2$. se $\dim V = n$.

1. endomorfismi coniugati

Dati $f, g \in End(V)$

Diremo che $g \sim f$ "g è coniugato a f o g e f sono end. coniugati" se:

$\exists\, h \in GL(V)$ t.c. $g = h \circ f \circ h^{-1}$

Sto considerando $\phi_h : GL(V) \longrightarrow S(End(V))$

$f \longrightarrow h \circ f \circ h^{-1}$ è una rel di equivalenza.

versione matriciale

Se $V = \mathbb{K}^n$ $End(V) = M(n, \mathbb{K})$

$B \sim A$ "cioè B è simile ad A" se $\exists\, P \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c $B = PAP^{-1}$

$\sim$ È una specializzazione della DS-equivalenza.

però $rnk(f)$ era invariante completo per la DS-equivalenza

mentre $rnk(f)$ non è invariante completo per la relazione di coniugio

infatti $rnk(I_2) = rnk\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ma $\nexists\, P \in GL(2, \mathbb{K})$ t.c.

$P I P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ poichè $\forall P \in GL(2, \mathbb{K})$ $P I_2 P^{-1} = I_2$

Infatti $A = \lambda I_n$ $B = \mu I_n$ $A \sim B \iff \lambda = \mu$.

$B = PAP^{-1}$ $\mu = \mu I_n = P \lambda I_n P^{-1} = \lambda P . P^{-1} = \lambda I_n = \lambda$

Se $\mathbb{K}$ è ∞ ci sono classi ∞ di equivalenza.

det è invariante per coniugio perchè

Se $B \sim A \Rightarrow \det(B) = \det(A)$

$B = PAP^{-1} \Rightarrow \det(B) = \det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1})$

$= \det(A) \cdot \det(P \cdot P^{-1}) = \det(A) \cdot \underbrace{\det(I)}_{=1} = \det(A)$

Non basta $I_2 \not\sim -I_2$ ma hanno stesso det e stesso rnk. .

EXTRA

Sia $f \in End(V)$ $\quad \det(f) = \det(M_B(f))$ $\quad B$ base di V.

non dipende da B perchè $M_{B'}(f) \sim M_B(f)$.

$g \sim f \Rightarrow \det(g) = \det(f)$

$M_B(g) \sim M_B(f) \Rightarrow \det(M_B(g)) = \det(M_B(f)) \Rightarrow \det(g) = \det(f)$

$\left.\begin{array}{l} \text{rnk} \\ \text{traccia} \\ \text{det} \end{array}\right\}$ Sono invarianti per coniugio ma non sono invarianti completi.

Definizioni

- Sia $f \in End(V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, λ è autovalore per f se $\dim(Ker(f - \lambda id_V)) \geq 1$

  e cioè se $\exists\, v \in V,\ v \neq 0,$ t.c. $f(v) = \lambda v$.

- Spec$(f) = \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda$ è autovalore per $f \}$

  $= \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \dim(Ker(f - \lambda id_V)) \geq 1 \}$

- Sia λ autovalore per $f \Rightarrow V_\lambda = V_\lambda(f) = \{Ker(f - \lambda id_V)\}$

  $= \{ v \in V$ t.c. $f(v) = \lambda v \}$

  V_λ = autospazio relativo.

- $\forall v \in V_\lambda$ $v \neq 0$ v è autovettore di f di autovalore λ

  $\Rightarrow V_\lambda = \{$ insieme degli autovettori per $f \}$

- $\dim V_\lambda = m_g(\lambda) \equiv$ molteplicità geometrica di λ

se g ed f sono endomorfismi coniugati allora lo spettro e la dimensione dell'autospazio relativo sono f-invarianti

Se $g \sim f \Rightarrow$ 1) $\mathrm{Spec}(g) = \mathrm{Spec}(f)$ $\quad g, f \in \mathrm{End}(V) \quad V$ $\mathbb{K}$.sp.

2) $\dim(V_\lambda(g)) = \dim(V_\lambda(f))$

dim

1) Se $g \sim f \Rightarrow \exists\, h \in GL(V)$ t.c $g = h \circ f \circ h^{-1} \Rightarrow g \circ h = h \circ f$

Se prendo λ autovalore di $f \Rightarrow \exists\, v \in V$ $v \neq 0$ t.c v è autovettore per f relativo a λ. $\Rightarrow f(v) = \lambda v$.

$(g \circ h)(v) = (h \circ f)(v) = h(f(v)) = h(\lambda v)$ ma h è isomorfismo,

quindi h è invertibile $\Rightarrow$ $h(\lambda v) = \lambda(h(v))$ e $h(v) \neq 0$

Faccio lo stesso procedimento con g e ottengo che se λ è autovalore per $f \Rightarrow \lambda$ è anche autovalore per g.

2)

$h(V_\lambda(f)) = V_\lambda(g)$ h manda l'autospazio di f in quello di g. ma essendo h un iso preservano le dim

$\Rightarrow \dim(V_\lambda(f)) = \dim V_\lambda(g)$

molteplicità geometrica

$m_g(\lambda) = \dim(V_\lambda(g))$ è invariante per coniugio

Quindi spec(f) e $\dim(V_\lambda(f))$ sono invariante per coniugio

$\begin{cases} \text{Spettro} \\ \text{dimensione dell'autospazio relativo} = \text{molteciplità algebrica} \end{cases}$

Sono invarianti per coniugio

Spec(f)=spec(A) dove A è la matrice associata ad f, vale per ogni base

$f \in End(V)$ V sp.v. B base di V $M^B_B(f)$

Allora λ è autovalore per $f \iff \lambda$ è autovalore per A.

dim

Se λ è autovalore per $f \Rightarrow \exists\, v \in V$ $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$

$\iff \underbrace{[f(v)]_B}_{AX} = \lambda \underbrace{[v]_B}_{X}$ con $[v]_B \neq 0 \iff AX = \lambda X$ e cioè

$\iff \lambda$ è autovalore per $A \iff$
$\lambda \in Spec(A)$ ☒

Inoltre vale che $V_\lambda(A) = [V_\lambda(f)]_B$

$\supseteq$ $X \in V_\lambda(A) \Rightarrow \exists\, v \in V$ t.c. $[v]_B = X$

$\Rightarrow AX = \lambda X \Rightarrow f([v]_B) = \lambda [v]_B \Rightarrow f(v) = \lambda v \Rightarrow$
$\lambda \in V_\lambda(f)$

$\subseteq$ $v \in V_\lambda(f) \Rightarrow f(v) = \lambda v$ Pongo $X = [v]_B$
$(f[v])_B = \lambda [v]_B \Rightarrow AX = \lambda x \Rightarrow X \in V_\lambda(A)$

☒

EXTRA ↓

- λ è autovalore per $A \iff \exists X \neq 0$ t.c. $AX = \lambda X \iff$
$\exists X \neq 0 \mid X \in Ker(A - \lambda I) \iff \det(A - \lambda I) = 0$
poiché se $\det(A - \lambda I) \neq 0 \Rightarrow (A - \lambda I)X = 0$ avrebbe
0 come soluzione

- $p_A(t) = \det(A - tI) \equiv$ pol. caratt. di A.

Casi particolari

- Se T è triang. sup. $T = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow T - tI = \begin{pmatrix} a_1 - t & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n - t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_T(t) = (a_1 - t) \cdots\cdots (a_n - t)$ cioè gli autovalori sono gli elt sulla diagonale.

- Se $A = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & P \end{array}\right)$ $\det(A) = \det(M) \cdot \det(P)$

$$A - tI = \left(\begin{array}{c|c} M - tI & N \\ \hline 0 & P - tI \end{array}\right) \Rightarrow p_A(t) = \det(A - tI) =$$

$$= \det(M - tI) \det(P - tI) = p_M(t)\, p_P(t)$$

Polinomio caratteristico

$$p_f(t) = \det(A - tI) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} tr(A) t^{n-1} + \dots + \det(A)$$

$$p_f(0) = \det A$$

$$tr(A) = \sum_{j=1}^{k} a_{jj} .$$

proposizione 2→ $A \in M(n,K)$, $\lambda \in$ Spec(A), cioè è autovalore $\Longleftrightarrow$ $\det(A-\lambda I)=0$ (è radice del pol. caratteristico)

$A \in M(n, K)$. $\lambda \in Spec(A) \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$\lambda \in Spec(A) \Rightarrow Ker(A - \lambda I) \geq 1 \Longleftrightarrow rnk(A - \lambda I) < n$

numero incognite $= rnk\, A$.

$\Longleftrightarrow A - \lambda I = M$ non è invertibile $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

e quindi $\lambda \in Spec(A) \Longleftrightarrow \lambda$ è radice di $p_A(t)$

molteplicità algebrica

$m_a(\lambda)$

$p_f(t) = (\lambda - tI)^{m_a(\lambda_i)}$

"quante volte λ è radice di $p_f(t)$"

Lo spettro di A è finito e ci sono al più n autovalori distinti

$\forall \lambda$ autovalore coincide con le radici di $p_f(t)$

$Spec(A) = \{ \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. λ è autovalore $\} = \{$ radici di $p_f(t) \}$

se $\deg p_f(t) = n \Rightarrow$ ci sono al più n radici $\Rightarrow$

$\dim Spec(A) \leq n$.

Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico
invarianza del polinomio caratteristico

$A, B \in M(n, \mathbb{K})$ Se $B \sim A \Rightarrow p_B(t) = p_A(t)$

$$f_A : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto a(x)$$

$\forall a \in \mathbb{K}[t]$ f_a manda ogni scalare nella valutazione del polinomio in quello scalare.

$p_B(t) = p_A(t) \Leftrightarrow f_A = f_B$

Se $B \sim A \Rightarrow \exists\, P \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c $B = PAP^{-1}$

$p_B(t) = \det(B - tI) = \det(PAP^{-1} - tI) = \det(P(A - tI)P^{-1})$

$= \det(A - tI)\det(P \cdot P^{-1}) = \det(A - tI)\underbrace{\det(I_n)}_{1} =$

$= p_A(t)$

$\mathbb{K}$ ∞

$\mathbb{K}$ finito vale solo $p_B(t) = p_A(t) \Rightarrow f_A = f_B$

$p(t) \in \mathbb{K}[t] \subset \mathbb{K}(t) \to$ campo delle frazioni

Da questo segue che dati $g, f \in End(V)$ se $g \sim f \Rightarrow p_g(t) = p_f(t)$

Poichè $g \sim f \Rightarrow \forall B$ base di V $M_B^B(g) \sim M_B^B(f) \Rightarrow p_g(t) = p_f(t)$

Relazione di disuguaglianza tra molteplicità algebrica e geometrica

λ autovalore $\quad f \in End(V)$

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n.$$

se λ è autovalore $\Rightarrow \exists\, v \in V$ t.c. v è autovettore relativo a $\lambda \Rightarrow V_\lambda \neq \{0\} \Rightarrow \dim V_\lambda = m_g(\lambda) \neq 0$.

$$\dim V_\lambda = m_g(\lambda) = d$$

Sia $D = \{v_1, \dots, v_d\}$ base di V_λ che estendo a B base di V $\quad B = \{v_1, \dots v_d, v_{d+1}, \dots, v_k\}$ t.c. $d+k=n$.

$$A = M^B_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & M \\ \hline 0 & N \end{array}\right) \Rightarrow p_f(t) = \det(A - tI) \overset{A \in T^+}{=}$$

$$= (\lambda - t)^d \cdot p_N(t)$$

$$d = m_g(\lambda) = \dim(V_\lambda)$$

$$d = m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$$

Dunque gli invarianti più importanti trovati fin ora sono

$$p_f(t) \Rightarrow \begin{cases} \det(f) \\ \operatorname{spec}(f) \\ m_a(\lambda) \\ \text{traccia} \end{cases} \qquad \dim(V_\lambda(f)) = m_g(\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{rnk} f \\ \shortparallel \\ \dim \operatorname{Im} f \end{cases}$$

Non è un sistema completo d'invarianti.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_A(t) = p_B(t) = t^4$$

$$\dim(\ker(A)) = \dim \underbrace{\ker(B)}_{V_0(B)} = 2$$

Ma $A^2 \neq 0$ e $B^2 = 0$ $\Rightarrow A^2 \nsim B^2 \Rightarrow A \nsim B$

Proprietà geometriche degli autospazi

V $\mathbb{K}$ sp. v. $\quad W_1, \dots, W_k$ ssp di V

I seguenti fatti sono equivalenti

1) $\dim(W_1 + \dots + W_k) = \sum_{i=1}^{k} \dim(W_i) = \dim(W_1) + \dots + \dim(W_k)$

2) Se B_i è base di W_i $\Rightarrow$ $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ è base di $W_1 + \dots + W_k$.

3) Se $w_i \in W_i \ \forall i$, e $w_1 + \dots + w_k = 0 \Rightarrow w_1 = \dots = w_k = 0$

4) $\forall v \in W_1 + \dots + W_k$ $\quad \underbrace{v = w_1 + \dots + w_k}_{\text{si scrive in maniera unica}}$ con $w_i \in W_i \ \forall i$

dim.

2 ⇒ 1 B_i è base di W_i per hp e $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ è base di $W_1 + \ldots + W_k$

vale che $|B_i| = \dim W_i$ e $|B| = |B_1| + \ldots + |B_k|$ ⇒

$$\dim(W_1 + \ldots + W_k) = \dim(W_1) + \ldots + \dim(W_k)$$

1 ⇒ 2. $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ genera $W_1 + \ldots + W_k$.

$|B| = \dim(W_1 + \ldots + W_k)$ ⇒ B è base di $W_1, \ldots, W_k$

2 ⇒ 3 scrivo $\forall w_i$ come comb. lineare di B_i

$w_1 + \ldots + w_k = \alpha B_1 + \ldots + \gamma B_k = 0$ ma $B_1, \ldots, B_k \in B$

che per hp è una base ⇒ B_i sono lin. indip ⇒

$\alpha B_1 + \dots + \gamma B_k = 0 \iff \alpha = \gamma = 0 \iff w_i = 0 \quad \forall i.$

3 ⇒ 4

Sia $r = w_1 + \dots + w_k = w_1' + \dots + w_k' \Rightarrow$

$w_1 + \dots + w_k - (w_1' + \dots + w_k') = 0 \Rightarrow \underbrace{(w_1 - w_1')}_{\in W_i} + \dots + \underbrace{(w_k - w_k')}_{\in W_k.} = 0$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} w_i - w_i' = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow w_i = w_i' \quad \forall i.$

4 ⇒ 2

$B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ genera $W_1 + \dots + W_k$. basta mostrare che B è linear. indipendente

$\underbrace{\alpha(B_1)}_{w_1} + \dots + \underbrace{\gamma(B_k)}_{w_k} = 0 \Rightarrow w_1 + \dots + w_k = 0 + \dots + 0 = 0$

ma la scrittura è unica $\Rightarrow w_i = 0 \ \forall i$

Poichè B_i è base di W_i, tutti i coeff. della comb. lin. sono nulli $\Rightarrow$ tesi.

Se vale 1 delle 4 condizioni e quindi tutte allora, $W_1 \oplus \ldots \oplus W_K$ sono in somma diretta multipla.

Gli autospazi sono in somma diretta multipla.

Sia $f \in End(V)$ $\quad Spec(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ Allora $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

dim.

P.B se $v_1 = 0$ ho finito.

P.I considero $v_1 + \dots + v_k = 0$

applico f $\longrightarrow$ $f(v_1) + \dots + f(v_k) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0}$ (1)

moltiplico per λ_k e ottengo $\boxed{\lambda_k v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0}$ (2)

$(1) - (2) = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) - (\lambda_k v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = 0$

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1}} + \cancel{(\lambda_k - \lambda_k)} v_k = 0$$

per hp. induttiva $\left.\begin{array}{l} (\lambda_1 - \lambda_k) v_1 = 0 \\ (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = 0 \end{array}\right\}$ ma i $\lambda_i - \lambda_j$ sono $\neq 0$ perché distinti

$\Rightarrow v_1 = \dots = v_{k-1} = 0$

$\Rightarrow v_k = 0$

Osservazione in generale vale che $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \subsetneq V$