TEOREMA FORMA NORMALE DI JORDAN

Titolo nota 09/09/2021

ESISTENZA

Ogni endomorfismo nilpotente ammette basi di Jordan.

UNICITA'

La matrice in forma normale di Jordan associata non dipende dalla scelta della base di Jordan in quanto e' completamente determinata dalla stringa di dimensioni $D(g)$.

RIFORMULAZIONE

Per ogni endomorfismo nilpotente $g: W \to W$ $\exists$ una decomposizione $W = \bigoplus_{j=1}^{k} Z_j$ tale che:

1. Ogni Z_j è g-invariante
2. $\forall\, g|_{Z_j}$ ammette una base ciclica e quindi una base di Jordan con un solo blocco.
3. Sia $t_j = \dim(Z_j)$ con $t_j \geq t_{j+1}$.

la stringa $(t_1, \dots, t_k)$ è completamente determinata dalla stringa di dimensioni $D(g)$

Quindi la forma di Jordan è un invariante completo per endomorfismi nilpotenti a meno di coniugazione

Dimostrazione Unicita'.

1 Ammettiamo l'esistenza

2 Sia $J = D(J(0,t_1), \dots, J(0,t_s))$
- nilpotente
- in forma di Jordan.
- taglia $m \times m$
- $q_J(t) = t^r$ con $r = t_1$.

3 J è codificata dalla funzione: $b : \{1, 2, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$b(n) = \{\, j \text{ t.c. } t_j = n \,\}$$

può succedere che $b(n) = 0$

4 Vale che $\sum_{n=1}^{m} n\, b(n) = m$ } questa è condizione necessaria e sufficiente affinché b sia realizzabile

per mezzo di qualche J nilpotente

5 Abbiamo un'altra funzione che codifica $D(J)$

$$d : \{1, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$d(n) = \dim(\mathrm{Ker}(J^n))$$

Se $q_J(t) = t^r$ sappiamo che $0 < d(1) < \dots < d(r) = m = d(r+1) = \dots d(m)$

Queste condizioni sono necessarie ma in generale non sufficienti.

6 Mostriamo che le funzioni b e d sono ricavabili l'una dall'altra.

① d è determinata per mezzo di b.

$$J^n = D(J(0,t_1)^n, \dots, J(0,t_s)^n)$$

$$d(n) = m - \mathrm{rnk}(J^n) = m - \sum_j \mathrm{rnk}(J(0,t_j)^n)$$

Inoltre $\forall$ blocco di Jordan $\quad \mathrm{rnk}(J(0,h)^n) = \max\{h-n, 0\}$

$$\Rightarrow \quad d(n) = m - \sum_{k=1}^{m} b(k) \max\{k-n, 0\}$$

2 b è determinata da d.

d individua il pol. minimo t^r

Se $n > r \Rightarrow b(n) = 0$

Per $1 < n \leq r$

$$d(n) - d(n-1) = \sum_{K=1}^{m} b(K)\left(\max\{K-n, 0\} - \max\{K-n-1, 0\}\right) = \sum_{K \geq n} b(K)$$

Esplicitiamo b in funzione di d.

$$b(r) = d(r) - d(r-1) = m - d(r-1)$$

$$b(r-1) = d(r-1) - d(r-2) - b(r) =$$

$$d(r-1) - d(r-2) - d(r) + d(r-1) = 2d(r-1) - \left(d(r) + d(r-2)\right)$$

$$\forall\ 1 < n < r \qquad b(n) = d(n) - d(n-1) - \sum_{k \geq n+1} b(k)$$

$$b(1) = d(1) - \sum_{k=2}^{m} b(k)$$

Osservazione $\qquad\qquad b = \phi(d)$

A questa ↓

$0 < d(1) < \dots < d(r) = m = d(r+1) = \dots = d(m)$

devo aggiungere $\quad \forall n \quad \phi(d)(n) \geq 0 \quad , \sum_n \phi(d)(n) n = m$

DIMOSTRAZIONE ESISTENZA.

1 $\left.\begin{array}{l} \ker(g^0) \subset \ker(g^1) \subset \dots \subset \ker(g^r) = W \\ 0 < d_1 < \dots < d_r = m \end{array}\right\}$ corrispondono.

- caso $r=1$ fatto!

2 Considero $r > 1$

3. 1 Considero un frammento a 3 termini.

$$\ker(g^{n-2}) \subset \ker(g^{n-1}) \subset \ker(g^n) \qquad \forall n \geq 2$$

2 Scrivo $\mathrm{Ker}(g^n) = \mathrm{Ker}(g^{n-1}) \oplus U$ → spazio complement. arbitrario ma la sua dimensione non varia

$\dim U = d_n - d_{n-1} > 0$

4 Lemma

1) $g(U) \subset \mathrm{Ker}(g^{n-1})$

2) $\dim g(U) = \dim U$

3) $\mathrm{Ker}(g^{n-2}) + g(U) = \mathrm{Ker}(g^{n-2}) \oplus g(U) \subset \mathrm{Ker}(g^{n-1})$

dim. lemma

Fisso $\{u_1, \dots, u_k\}$ base di U

1) $g(U) \subset \operatorname{Ker}(g^{n-1})$

$u_i \in \operatorname{Ker}(g^n) \Rightarrow g^n(u_i) = g^{n-1}(g(u_i)) = 0$

$\Rightarrow g(u_i) \in \operatorname{Ker}(g^{n-1}) \Leftrightarrow g(U) \subset \operatorname{Ker}(g^{n-1})$

2) $\dim g(U) = \dim U$

Mostriamo che $\{g(u_1), \dots, g(u_k)\}$ sono lin. indip.

$a_1 g(u_1) + \dots + a_k g(u_k) = 0$

$$g^{n-2}\left(a_1 g(u_1) + \dots + a_k g(u_k)\right) = g^{n-1}\left(a_1 u_1 + \dots + a_k u_k\right) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 u_1 + \dots + a_k u_k \in \mathrm{Ker}(g^{n-1}) \text{ and } \in U \Rightarrow \in U \cap \mathrm{Ker}(g^{n-1}) = \{0\}$$

$(+)$

$$\Rightarrow a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = 0 \iff a_i = 0 \ \forall i = 1 \dots k$$

3) $\operatorname{Ker}(g^{n-2}) + g(U) = \operatorname{Ker}(g^{n-2}) \oplus g(U) \subset \operatorname{Ker}(g^{n-1})$

$w \in \operatorname{Ker}(g^{n-2}) \cap g(U)$

$w = g(u)$ perché $w \in g(U)$

$w \in \operatorname{Ker}(g^{n-2}) \Rightarrow (g^{n-2})(w) = 0$

$g^{n-2}(w) = g^{n-2}(g(u)) = g^{n-1}(u) = 0 \Rightarrow \underset{\in U}{u} \in \operatorname{Ker}(g^{n-1})$

$\Rightarrow u \in \operatorname{Ker} g^{n-1} \cap U = \{0\}$

Costruiamo ora basi di Jordan.

1 Prendo un fragmento a tre termini.

$$\mathrm{Ker}(g^{r-2}) \subset \mathrm{Ker}(g^{r-1}) \subset \mathrm{Ker}(g^{r}) = W.$$

2. Fisso una decomposizione in $\oplus$ $\quad W = \mathrm{Ker}(g^{r-1}) \oplus U_r$

3 Fisso una base di U_r che costituisce la R_1 della tabella

$u_{r,1}, \dots, u_{r,b(r)}$ dove $b(r) = d_r - d_{r-1} = m - d_{r-1}$

4 Applico g ai vettori di R_1 otteniamo una prima stringa parziale di R_2.

- Se ho trovato una base di tutto W mi fermo
- Altrimenti considero un altro frammento + a sx

1) $\ker(g^{r-3}) \subset \ker(g^{r-2}) \subset \ker(g^{r-1})$

2) grazie al lemma determino una decomposizione $\oplus$

$$\ker g^{r-1} = \ker(g^{r-2}) \oplus U_{r-1}$$

3) richiedo che $U_{r-1} = g(U_r) \oplus U'_{r-1}$

4) base di U_{r-1} è $\{g(u_{r,1}), \dots, g(u_{r,b(r)}), u_{r-1,1}, \dots, u_{r-1,b(r-1)}\}$

dove $b_{r-1} = d_{r-1} - d_{r-2} - b(r)$

5) Tale b_{0d} è R_2

Itero

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & C^1 & C^2 & \cdots & C^r & & & & & \\
R_1 & u_{r,1} & \text{———} & & u_{r,b(r)} & & & & & \\
R_2 & g(u_{r,1}) & \text{———} & & g(u_{r,b(r)}) & u_{r-1,1} & \text{———} & u_{r-1,b(r-1)} & & \\
R_3 & g^2(u_{r,1}) & \text{———} & & g^2(u_{r,b(r)}) & g(u_{r-1,1}) & \text{———} & g(u_{r-1,b(r-1)}) & u_{r-2,1} \; \text{———} & u_{r-2,b(r-2)} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
R_r & g^r(U_1) & \cdots & & g^r(U_r) & g^{r-1}(U_{r-1,1}) & \cdots & & &
\end{array}
$$

L'unione di questi vettori è una base di W

Considero le colonne C^i $\qquad W = \bigoplus_{i=1}^{\tilde{m}} \mathrm{Span}(C^i)$

1) Per costruzione i vettori di $t_i C^i$ generano un ssp g-invariant

2) Li ordino dall'alto verso il basso costituiscono una base ciclica per la restrizione di g.

3) Se inverto l'ordine (dal basso verso l'alto) danno una base di Jordan con un solo blocco.

4) La lunghezza di C^i è uguale alla taglia del corrisp. blocco di Jordan.

5) $b(n) \equiv$ numero di colonne di lunghezza $= n$ $\forall n = 1 \dots r$

Tale numero è esprimibile mediante $D(g) = \{0 < d_1 < \dots < d_r = m\}$

Troviamo b in funzione di d come visto nell'unicità.

Teorema di classificazione degli endomorfismi triangolabili a meno di coniugazione.

Sia V un K-spazio, $\dim V = n$.

L' unione del **polinomio caratteristico** e, per ogni autovalore λ**, la stringa delle dimensioni** dei corrispondenti autospazi generalizzati, costituisce un invariante completo su $T(V)$ a meno di coniugazione.

Se il campo K è algebricamente chiuso, allora è un invariante completo su tutto $\mathrm{End}(V)$ a meno di coniugazione.

Tale invariante completo determina in modo univoco la forma normale di Jordan tra le matrici che rappresentano un dato endomorfismo triangolabile.

Ne segue che la **forma normale di Jordan** è anch' essa un invariante completo.